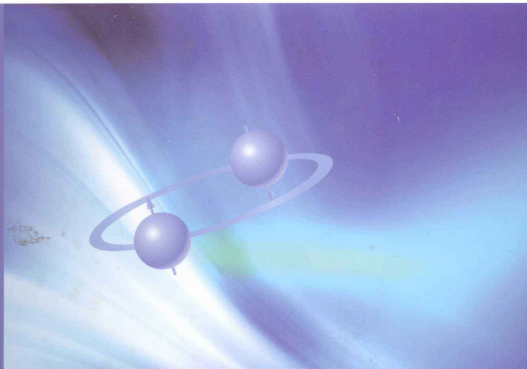
国家“十一五”重点图书

量子物理新进展系列

# 量子力学的相空间理论

范洪义 吕翠红 著





上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

巍巍交大　百年书香
www.jiaodapress.com.cn
bookinfo@sjtu.edu.cn



策划编辑 / 戴柏诚
责任编辑 / 武晓雁
封面设计 / 朱　懿
责任营销 / 刘志宏

## 量子物理新进展系列

- 光学变换 · 从量子到经典
- 开放系统量子退相干的纠缠态表象论
- 量子力学的不变本征算符方法
- 量子力学语言——狄拉克符号法进阶
- **量子力学的相空间理论**
- 一维波动力学新论

ISBN 978-7-313-07064-7



定价: 69.00元

量子物理新进展系列

上海交通大学学术出版基金资助项目

# 量子力学的相空间理论

范洪义　吕翠红　著

上海交通大学出版社

## 内 容 提 要

量子力学的相空间理论研究量子态在相空间中的准几率分布函数表示、演化、重构，以及经典函数的量子化、经典变换与量子幺正变换的关系。本书用作者自创的有序算符内的积分技术和纠缠态表象以崭新的视角和方法展开讨论，促进和深化了量子统计和量子信息的理论研究。书中还着重讨论了由量子纠缠所引起的相空间量子力学的新特点，提出相空间中的新变换，明显地丰富与发展了这一学科。

本书适合理工科大学物理专业和通信工程专业的师生及理论物理领域的研究人员阅读。

**图书在版编目（CIP）数据**

量子力学的相空间理论／范洪义，吕翠红著．—上海：上海交通大学出版社，2012

ISBN 978-7-313-07064-7

Ⅰ.①量…　Ⅱ.①范…②吕…　Ⅲ.①量子力学-研究②相空间-研究　Ⅳ.①O413.1②O186.14

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 007357 号

**量子力学的相空间理论**

范洪义　吕翠红　著

上海交通大学 出版社出版发行

（上海市番禺路 951 号　邮政编码 200030）

电话：64071208　出版人：韩建民

浙江云广印业有限公司印刷　全国新华书店经销

开本：850 mm×1168 mm　1/32　印张：12.125　字数：313 千字

2012 年 2 月第 1 版　2012 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-313-07064-7/O　定价：69.00 元

---

# 前　言

相空间一词最早出现在经典物理的哈密顿动力学中，为了形象地说明哈密顿方程，以质点的坐标 $q$ 与动量 $p$ 组成的坐标架就张成了一个相空间. 相空间中相体积的概念被用来描写统计力学中的状态数、系综和热力学几率，相体积在演化中的不变性称为刘维定理，等等. 那么，随着量子论的出现，相空间的概念应如何发展呢？

在新量子论中，根据海森堡的不确定性原理，人们不能同时精确地测量微观粒子的位置 $q$ 和动量 $p$，即不能确定到一个相点. 于是自然就会想到在 $(q, p)$ 相空间中定义准分布函数来研究微观粒子的量子态及其运动（当然，其确定的程度要小于最大可能的准确程度），这可以追溯到吉布斯所提出的系综理论. 在这个理论框架中，系统的时间演化由相空间中的某一轨道 $(q_i(t), p_i(t))$ 来描述. 早在 1930 年，Dirac 就在他的《量子力学原理》一书中指出，"吉布斯提出的系综，通常在实际上除了作为一个粗浅的近似外，是不可能实现的，但是，即便如此，它仍然形成为一个有用的理论上的抽象."他又说，"由于在量子力学里不可能同时对 $q$ 与 $p$ 赋予数值，相空间在量子力学中没有意义，从这种事实出发，相应的密度算符 $\rho$ 的存在确是相当令人惊异的."到了 1932 年，Wigner 引入了对应密度算符 $\rho$ 的准经典分布函数 $f(q, p)$，它的边缘分布分别对应于在坐标空间和动量空间测量到粒子的几率，赋予了相空间以新的意义. 从此，翻开了相空间量子力学的扉页.

显然，描述量子系统的准经典分布函数在相空间量子力学具有运动学的意义. 随着时间的推延，初始态的准经典分布函数通常在 $(q, p)$ 空间有展宽，例如一个高斯波包（即一组振荡的、通过干

扰这个振荡在小范围内相互增强,在此小范围外彼此抑制的复合波)的自由运动会随时间展宽,而这样一个波包在谐振子势下不展宽.在相空间中可以建立相似于薛定谔波动方程的 Wigner 函数的时间演化方程,这就使得研究量子相空间中分布函数演化也带有动力学性的意义,即具有波粒二象性的意义.

研究相空间量子力学的另一意义就是企图寻找量子力学与经典力学的相似性,通过与经典力学的规律做类比来深入理解微观世界的运动规律.思想家康德曾说:"每当理智缺乏可靠论证的思路时,类比这个方法往往能指引我们前进."由于量子力学理论波函数的几率假设本身带有统计的特性,所以量子力学的相空间描述能与经典统计力学和统计数学作一定的类比.

20 世纪 70 年代诞生的量子光学的重要实验支柱是激光,描述它的量子态是相干态,一种最接近于经典情况的态.众所周知,一个经典粒子在$(q, p)$相空间占据一点,它的运动是一条线轨迹;而一个量子相干态在相空间中则占据一块小面积,这是因为坐标-动量的均方差之积 $\Delta(Q)\Delta(P)=\frac{\hbar}{2}$,这个极小面积的存在暗示了相空间量子力学的研究有其本身的特点,因而是有趣的.量子相干态的演化在相空间中就是这块面积的移动,我们发现它可以对应于经典傅里叶光学的菲涅耳衍射.事实上,正如将要展示给读者看的,量子光学的许多重要内容在相空间中阐述物理意义还是较明确的,这是研究相空间量子力学的第三层意义.

量子力学的大部分算符之间是不对易的,它们的经典对应难以捉摸,在相空间中的表现有多样性,这就使得相空间量子力学的内容丰富多彩.相空间表述的一个重要任务是:把量子力学算符以一定的规则(例如 Weyl 对应规则)对应到 $q-p$ 相空间的经典的坐标-动量函数,它与量子态的 Wigner 函数密切相关.Dirac 说:"对于经典力学的正则变换应该有量子力学的幺正算符与其对应."所以,从经典变换寻找有物理应用的量子算符也是相空间量子力学的重要任务.例如,正如我们以后会谈到的从经典光学的菲涅耳变换

可以找出我们所谓的量子菲涅耳算符，并研究其与量子 Tomography 理论的关系.

英国物理学家麦克斯韦曾说："为了不通过一种物理理论而获得物理思想，我们就应当熟悉现存的物理相似性，这样一来，所有的数学科学就建立在物理定律与数的定律的关系上，以致精密科学的目的就是把自然问题化为通过数运算的量来决定."（薛定谔正是把点粒子的经典动力学看作是几何光学的近似而想出了波函数的线性波动方程.）这段话很能概括我们研究相空间量子力学的途径，即用自己发明的有序算符内的积分技术，通过对由 ket - bra 组成的积分型投影算符积分，完成从经典变换到量子力学变换的过渡，使得量子相空间的统计理论通过相干态表象能与光学变换理论相对照，并能自洽地纳入压缩态理论，极大地丰富量子相空间的内容，深化量子力学的数理基础.

量子相空间分布函数作为量子力学态的一种描述允许人们用尽可能多的经典语言来描述系统的量子特性. 另一方面，人们也逐渐想办法来测量对应密度算符 $\rho$ 的 Wigner 函数，从它的 Radon 变换再发展 Tomography 测量理论，因此量子相空间理论也可以为量子测量提供重要的理论基础.

本书用作者自创的有序算符内的积分技术（IWOP 技术）以崭新的视角和方法研究量子态在相空间中的准几率分布函数表示、演化、重构，以及经典函数量子化、经典变换与量子幺正变换的关系，以促进和深化量子统计的理论. 由于方法新颖，故能博观返约，由约创新. 近年来，量子纠缠被广泛用来研究量子光学、量子信息和量子计算机，本书将着重用 IWOP 技术讨论由量子纠缠所引起的相空间量子力学的新特点，这将成为本书的特色之一.

清代大学者袁枚曾说："……由博观返约之功，为陈年之酒，风霜之木，药淬之匕首，非枯槁简寂之谓，然必须力学苦思，常年不倦."科技著作的写作应该是承前人未了之绪，开后人未省之端.

写作风格上，我们尽量向 Dirac 学习，崇尚简洁与优美，有序

算符内的积分技术揭示了 Dirac 符号法的深层次的美与简洁，这一点使人想起清代桐城派代表人物刘大魁曾写道："凡文笔老则简，意真则简，辞切则简，理直则简，味淡则简，品贵则简，神远而含藏不尽则简，故简为文章尽境."

上海交通大学校领导张杰、谢绳武、叶取源及物理系领导叶庆好十分关心"量子物理新进展系列"的写作和出版，给予了有力的支持，笔者范洪义在写作过程中得到妻子翁海光以及研究生们的协助，他们是刘述光、唐绪兵、宋军、陈俊华、任刚、许业军、谢传梅、胡利云、袁洪春、徐学翔、范悦、周军和陈锋，在此深表感谢.每当夜深人静、身心困倦想偷点懒时，范洪义脑海里就会闪现慈母毛婉珍 50 多年前在灯下为小学生批阅作文时边读边改时的情景，她那消瘦的脸庞和慈祥的目光浮现在儿子眼前，鞭策着他再打起精神，坚持工作一会儿.

科研作品贵在学附渊源，标新立异，方能使读者动其妍思，引其芳绪.人的精力与时光有限，而追求科学真理无涯，因此吾人读书，当读创意鲜明者、理论优美者、方法直捷者、叙述清晰者、悠久不朽者，以此五点为标准，则鲜见佳本也.笔者不才，写作时尽量以此五点标准来要求自己，然终究水平有限，祈望读者教正.

范洪义写于浩然大厦

2011 年 12 月

# 目　录

# 绪论　相空间量子化的早期理论与绝热不变量

量子力学除了有薛定谔的波动力学表述、海森堡的矩阵力学表述(这两种表述被狄拉克视为同一[1],并发展为符号法)和费曼的路径积分表述[2]外,还有一种常用的是相空间表述,相空间的维数是系统的自由度的两倍. 可以说,玻尔-索末菲作用量的量子化(旧量子理论)就是在相空间中进行的. 以谐振子为例,令其哈密顿量等于一个常量

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \equiv E_n \tag{0.1}$$

并设 $q = \sqrt{\frac{2E_n}{m\omega^2}}\sin\theta$, $\mathrm{d}q = \sqrt{\frac{2E_n}{m\omega^2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta$, 这就成了相空间中的一个椭圆方程. 沿椭圆环路积分包含的面积

$$\oint p\mathrm{d}q = \frac{2E_n}{\omega}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{\omega}E_n = \frac{E_n}{\nu} \tag{0.2}$$

再由普朗克量子假设

$$E_n = nh\nu \tag{0.3}$$

则

$$\oint p\mathrm{d}q = nh \tag{0.4}$$

说明该面积内有 $n$ 个量子.

系统动力学的相空间描述方式有利于“绝热不变量”的讨论. 力学系统在外部条件无限缓慢改变(外来干扰)下的进程叫做“绝热的”. 相对于外来干扰而言,需要加以量子化的量,从经典力学层

面上看必须是对外来干扰不敏感的量. 爱因斯坦曾经提出绝热不变量的概念，它是绝热过程中的一个不变量. 仍以谐振子为例，从式(0.2)可以看出$\frac{E_n}{\nu}$是绝热不变的. 这可以通过单摆来说明：在摆弦的起点挖一细孔，通过小孔极其缓慢地拉动摆弦，以改变摆的长度 $l$. 弦的张力由摆的重力与向心力两部分组成，所作的功

$$\delta A = -(mg\cos\varphi + ml\,\dot{\varphi}^2)\delta l \tag{0.5}$$

这里 $\varphi$ 是角位移. 在提升摆弦所导致的绝热变化中，发生了许多次振动，但 $l$ 没有明显改变，可通过平均值写出方程

$$\delta A = -(mg\,\overline{\cos\varphi} + ml\,\overline{\dot{\varphi}^2})\delta l \tag{0.6}$$

现在将能量的增加 $\delta A$ 分解为外能量的增加和内能量的增加：

$$\delta A = -mg\delta l + \delta E \tag{0.7}$$

对于内能部分，有

$$\delta E = [mg(1-\overline{\cos\varphi}) - ml\,\overline{\dot{\varphi}^2}]\delta l = (\overline{E}_{势能} - 2\,\overline{E}_{动能})\frac{\delta l}{l} \tag{0.8}$$

只要振动是简谐的，就有 $\overline{E}_{势能} = \overline{E}_{动能}$，因此

$$\frac{\delta E}{E} = -\frac{1}{2}\frac{\delta l}{l},\ \delta\ln E = \delta\ln\frac{1}{\sqrt{l}} \tag{0.9}$$

$$E\sqrt{l}\ 或\ \frac{E}{\nu} = 常数 \tag{0.10}$$

如果通过该孔缓慢地拉动摆弦，振动能量的改变将与频率成正比.

还可以更直观地用介观电路的量子化理论来分析量子电路中的绝热不变量，Louisell[3] 是第一个把介观电路量子化的物理学家，介观 $LC$ 电路的经典哈密顿量是

$$H = \frac{p^2}{2L} + \frac{q^2}{2C},\ p = L\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{0.11}$$

加入量子化条件 $[q,\ p] = \mathrm{i}\hbar$，即把电荷量子化为正则坐标，$L\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ 量子化为正则动量，并引入

$$q = \sqrt{\frac{\hbar\omega C}{2}}(a + a^{\dagger}),\ p = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar\omega L}{2}}(a^{\dagger} - a) \tag{0.12}$$

式中，$\omega L = (\omega C)^{-1}$，则哈密顿量变为

$$H = \frac{Q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L} \tag{0.13}$$

式中，$\Phi = LI$ 是电感磁通. 电量 $Q$ 的突变需要一脉冲电流 $I$，但是这种脉冲电流将会对电感产生一个无限大的磁场，所以 $Q$ 是不突变的. 同样地，$\Phi^2$ 正比于电感的磁场能量，它也是不可能突变的. 所以当一个介观 $LC$ 电路的 $L$ 和 $C$ 在外部干扰下做无限小的改变时，$L \to L + \delta L,\ C \to C + \delta C$，电路的能量改变为

$$\begin{aligned}\delta H &= \delta\left(\frac{Q^2}{2C}\right) + \delta\left(\frac{\Phi^2}{2L}\right) = Q^2\delta\left(\frac{1}{2C}\right) + \Phi^2\delta\left(\frac{1}{2L}\right)\\ &= -\frac{Q^2}{2C}\frac{\delta C}{C} - \frac{\Phi^2}{2L}\frac{\delta L}{L}\end{aligned} \tag{0.14}$$

由于参数 $L$ 和 $C$ 是绝热变化的，其间电路发生了多次振荡，故取平均（从而平均电容能＝平均电感能＝$E$），可以得到

$$\delta E = -\frac{\overline{Q^2}}{2C}\frac{\delta C}{C} - \frac{\overline{\Phi^2}}{2L}\frac{\delta L}{L} = -\frac{E}{2}\left(\frac{\delta C}{C} + \frac{\delta L}{L}\right) = -E\frac{\delta\sqrt{LC}}{\sqrt{LC}} \tag{0.15}$$

对方程(0.15)积分就得到

$$E\sqrt{LC} = E/\omega = \text{const.} \tag{0.16}$$

考虑上述一般讨论的一个具体情况. 在经典理论中，假设电路的电

容是板面积为 $A$ 的两平行板电容器，相距 $D$，填满介电常数为 $\varepsilon$ 的材料，那么

$$C=\frac{\varepsilon A}{D} \tag{0.17}$$

一块板对另一块板的作用力为

$$F=\frac{Q}{2A\varepsilon}Q \tag{0.18}$$

这正是分开这两块板所需要的作用力，由于拉板的速度非常慢，所需要的真正作用力

$$F=\frac{\overline{Q}}{2A\varepsilon}Q=\frac{1}{2A\varepsilon}CE=\frac{E}{2D} \tag{0.19}$$

所以

$$\delta E=F\delta D=\frac{E}{2D}\delta D \tag{0.20}$$

对式(0.20)积分即得到

$$\ln E=\ln\sqrt{D} \tag{0.21}$$

所以 $\dfrac{E}{\sqrt{D}}=\text{const.}$，由于电容与两板块之间的距离 $D$ 有关，$D$ 越大，电容越小，所以 $\omega=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}\propto\sqrt{D}$，又得到$\dfrac{E}{\omega}=\text{const.}$

至此，我们找到了量子 $LC$ 电路的绝热不变量，它在形式上类似上述钟摆的绝热不变量. 这种类比也称为科学的隐喻.

隐喻既是人类的一种思维活动，也是一种语言表述，长期以来它被广泛地应用于文学创作和思想交流. 如“桥影虚园空，水痕淡人情”(范洪义诗句)，“天河断情桥，皎月离愁灯”，而科学家们则将它用于探索和创新. 隐喻的主要功能是使我们能由此及彼、由表及里的联想，左右逢源地关联，举一反三地多方位思索. 如电影中的

蒙太奇手法，适时地切换意象，以达到新的境界. 尤其是对于理论物理学家，隐喻是作出重大发现的有效思维模式.

例如，关于德布罗意提出物质波-粒二象性公式（电子是粒子，又是波），一个有趣的故事说道，一天，德布罗意无意中看到学物理的哥哥忘在家中的一份关于"光量子理论"的学术会议记录，他读到了一位叫爱因斯坦的人提出的"光既是波也是粒子"的光量子理论. 他想："不难理解光是波，比如雨后七色彩虹的形成是由于各色光的波长不一样，它们遇到水珠后产生的折射率也不相同，使原本混在一起的各色光产生干涉. 然而将光看作是粒子，这太让人难理解了. 看来要想了解其中的奥秘，只有再上大学，去学物理！"于是他拜朗之万为师，用功起来. 由于德布罗意年轻时参加过第一次世界大战，在一个气象观测队里服役，因此每日里都盯着天气……不久，他觉得要了解天气莫过于观察青蛙，战争时他一直和青蛙生活在一起. 是青蛙跳水时的波纹提示了电子的波.

再如，在巴丁、库珀和施里弗攻克超导理论的进程中，库珀首先研究了费米面外围两个具有反方向自旋的电子之间的净作用力表现为吸引力的课题，并首告成功. 库珀感到非常兴奋，而巴丁坚持认为库珀的解决办法是不完善的. 因为他们尚不清楚如何从单个的"库珀对"发展出一个完全的多电子理论. 施里弗回忆道："我们尝试了许多办法，但是依旧没有进展."一个主要的障碍是同时对付多个电子对，而大多数的电子对是重叠在一起的. 即便是对这种情况下定义，也变得很困难.

一年后，施里弗找到了一个办法，即通过联想很多对夫妻在拥挤的舞池中跳扭摆舞这个例子来描述这个问题. 扭摆舞在 20 世纪 50 年代很流行，参加的数对夫妇都分开同他人跳舞，但是两人之间通过手拉手连在一起，即便彼此之间会隔有其他的舞者. 问题在于如何以数学的方式来表述这种情况. 施里弗记得巴丁说过："这对于我们来说非常困惑，这种情况处于一个动量空间. 你不应该过

多考虑坐标空间. 如果你用正确的语言来看待它的话，就没有那么困惑了.”经过努力，施里弗终于找到了超导体的基态波函数. 施里弗巧比电子对为跳扭摆舞就是一种隐喻.

又再如，玻恩的物质几率波与流感的比拟：

玻恩在 20 世纪 20 年代使哥廷根大学成了量子力学中心，他为薛定谔的公式找到了一种新的解释：在空间任何一个点上的波动强度——数学上通过波函数的模的平方来表达——是在这一点碰到粒子的概率的大小. 据此，物质波有点类似流感. 假如流感波及一座城市，这就意味着：这座城市里的人患流行性感冒的概率增大了. 波动描述的是患病的统计图样，而非流感病原体自身. 物质波以同样的方式描述的仅仅是概率的统计图样，而非粒子自身数量.

又再如，对称性的“自发破缺”是比较难以理解的物理概念. 萨拉姆举了下面的例子：假设邀请人们坐在一个圆桌上吃饭. 每个人的餐具旁是一盘色拉，它放在主菜盘之间. 如果你不懂得就餐的规矩，你就不知道你盘子左边的色拉还是右边的是属于你的——这是对称的. 然而，如果有一位客人拿了他右边的色拉，于是其他的人就必须照样做. 左-右对称性就“自发破缺”了.

可见，隐喻既可帮助理解物理，也可产生想象力. 值得指出，文学家的隐喻也可为物理学家所用，例如，南唐李后主(李煜)曾写过：“剪不断，理还乱”，本意是形容离愁，笔者范洪义将它用于描写量子力学中的量子纠缠态，并首先导出了纠缠态表象，为理解爱因斯坦的量子纠缠思想提供了新思路. 读者在本书的以后章节中，也会看到隐喻的其他应用.

## 参考文献

[1] Dirac P A M. Recollections of an exciting area [C] // History of 20th Century Physics. New York: Academic Press, 1977, 109.

[2] Feynman R P, Hibbs A R. Quantum Mechanics and Path Integrals

[M]. New York: McGraw-Hill, 1965.
[3] Louisell W H. Quantum Statistical Properties of Radiation [M]. New York: John Wiley, 1973.

# 第 1 章　普朗克创世量子论的历史回顾和普朗克公式的三种推导

## 1.1　普朗克的"移花接木"

说到相空间量子力学，它与量子统计学[1]密不可分，因此我们不可避免地要提到量子相空间的基本单位$\hbar$，它可以追溯到普朗克(1900 年)的光量子论的研究. 具体地说是普朗克最早在提出能量子的概念时，就出现了量子统计的萌芽. 这也可以从他提出的辐射能量密度公式(或线性振子平均能量公式)

$$U=\frac{\hbar\nu}{e^{\hbar\nu/(kT)}-1}\frac{8\pi\nu^2}{c^3} \tag{1.1}$$

中看出. 其中 $c$ 代表真空中的光速，$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$是黑体空腔内部频率为 $\nu$ 的电磁驻波的模式密度，可以从经典 Maxwell 电磁理论导出，并已计入了同一传播方向上的两种横向偏振态；$\frac{\hbar\nu}{e^{\hbar\nu/(kT)}-1}$是每个模式的平均能量[暗含了"振子"量的量子化(电磁波模式的量子化)].

简单回顾一下普朗克在 1900 年是如何慧眼独具的[2]. 历史上，在普朗克以前，关于黑体辐射的维恩公式是 ($\beta$, $\gamma$ 是常数，$\lambda$ 是波长，$\nu$ 是频率)

$$\psi_\lambda=\frac{\gamma}{\lambda^5}\exp\left(-\frac{\delta}{\lambda T}\right)\quad 或写成\quad \psi_\lambda=\alpha\nu^3\exp\left(-\frac{\beta\nu}{T}\right) \tag{1.2}$$

瑞利-金斯公式是

$$\psi_\lambda \mathrm{d}\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}\mathrm{d}\lambda(kT) \quad 或 \quad \psi_\lambda \mathrm{d}\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\mathrm{d}\nu(kT) \tag{1.3}$$

$kT$ 来自经典 Maxwell 分子运动论的能量均分律.

针对黑体辐射理论的维恩公式与瑞利-金斯公式的不和谐，普朗克最先是用热力学的方法进行分析，他注意到，如果维恩公式是正确的，那么比较式(1.2)和(1.3)可以引入一个振子的平均能量 $U$，让它对应瑞利-金斯公式中的 $kT$，因而看出

$$\nu^3 \exp\left(-\frac{\beta\nu}{T}\right) \propto U\nu^2 \tag{1.4}$$

或

$$U = \gamma\nu \exp\left(-\frac{\beta\nu}{T}\right) \tag{1.5}$$

由热力学第二定律

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \frac{1}{T} \tag{1.6}$$

$S$ 代表熵，以及 $\dfrac{\partial(1/T)}{\partial U} = -\dfrac{1}{T^2}\dfrac{\partial T}{\partial U}$，$\dfrac{\partial U}{\partial(1/T)} = -\beta\gamma\nu^2 \exp(-\beta\nu/T)$

可得

$$\frac{\partial T}{\partial U} = \frac{T^2}{\beta\gamma\nu^2}\exp(\beta\nu/T) \tag{1.7}$$

故有

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{\partial}{\partial U}\frac{1}{T} = -\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial U} = -\frac{1}{\beta\gamma\nu^2}\exp(\beta\nu/T) \propto -\frac{1}{U} \tag{1.8}$$

另一方面，如果瑞利-金斯公式是正确的，那么 $U=kT$，由式(1.6)可得

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} \propto -\frac{1}{U^2} \tag{1.9}$$

也就是说，观察线性谐振子的熵 $S$ 对内能 $U$ 的二次微商 $\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}$ 这个量，对于维恩公式来说为 $\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} \propto -\frac{1}{U}$，而对于瑞利-金斯公式来说为 $\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} \propto -\frac{1}{U^2}$，它们是不协调的. 普朗克找到了问题的症结（而实验物理学家只是看到根据温度-光谱在高频与低频处画出的曲线不同），于是他“移花接木”做调和，假定内插公式为

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{\alpha}{U(\beta + U)} \tag{1.10}$$

则有

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \kappa \ln \frac{\beta + U}{U}, \text{ 其中 } \kappa = -\frac{\alpha}{\beta} \tag{1.11}$$

由此解出 $U$，并比较式(1.5)，得

$$U = \frac{\beta}{\exp\left(\frac{1}{\kappa T}\right) - 1} = \text{const} \cdot \frac{\nu}{\exp\left(\text{const} \cdot \frac{\nu}{T}\right) - 1} \tag{1.12}$$

再比较瑞利-金斯公式，

$$U = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{\text{const} \cdot \nu}{\exp\left(\text{const} \cdot \frac{\nu}{T}\right) - 1} \tag{1.13}$$

用维恩位移律分别确定分子和分母中的常数，可见 $\alpha = -k$（玻耳兹曼常数），$\beta = \hbar\nu$，便导出了式(1.1).

为了进一步给出此公式的物理解释，普朗克“孤注一掷”，尝试用玻尔兹曼的统计法把总能量 $U_N = NU$ 分配于 $N$ 个粒子；另一方面，$U_N = p\varepsilon$（$p$ 是分立的整数，$\varepsilon$ 称为能量元），由组合学得

配容数(把 $p$ 个不可区分的能量元分配给 $N$ 个不可区分的振子的方式)是

$$\frac{(N+p-1)!}{(N-1)!p!} \approx \frac{(N+p)^{N+p}}{N^n p^p} = w \tag{1.14}$$

再用 $S_N = k\ln w$(熵与几率的关系),$S_N = NS$,和 Stirling 公式得到单个振子的熵,

$$S \approx k\left[\left(\frac{U}{\varepsilon}+1\right)\ln\left(\frac{U}{\varepsilon}+1\right)-\frac{U}{\varepsilon}\ln\frac{U}{\varepsilon}\right] \tag{1.15}$$

读者可以验证,对式(1.11)中的 $U$ 积分(用积分公式 $\int \ln ax\,\mathrm{d}x = x\ln ax - x$),可以得到式(1.15). 把 $\varepsilon$ 写为 $\hbar\nu$,$\hbar$ 是与振子特性无关的常数,Planck 再一次得到了式(1.1),后来确定 $\hbar = 6.55\times10^{-27}$ 焦耳秒.

就这样,普朗克在辐射理论中引入某种不连续能量单元,并用统计方法,重新导出了他的辐射公式所对应的熵的形式,从而确定线性谐振子能量元为 $\hbar\nu$.

普朗克亲自经历了物理理论的重大变革所伴随的酸甜苦辣. 他本人曾花了十五年时间来反思他的能量量子化问题是否正确. 他说,"一个新的科学真理的确立,与其说是由于反对者声明自己搞通了,不如说是因为它的反对者逐渐衰亡了,而新的一代一开始就习惯和熟悉这个真理."普朗克也谆谆告诫我们,要警惕科学上的假问题,避免为这些貌似正确的问题所投入的大量脑力和财力付诸东流.

## 1.2 玻色的"锦上添花"

直到 1924 年,S. N. Bose 用考虑粒子全同性的统计方法,即从黑体腔内光子的不可分辨性提出了有交换对称性的统计法导出普朗克公式,在给爱因斯坦的信中,Bose 写道:"……我试图不

用经典电动力学而导出 Planck 定理中的系数$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$，只是假定相空间中的终极基元区为$h^3$……"，才使得黑体辐射的理论摆脱了经典物理学的框框，玻色的"锦上添花"正式翻开了量子统计学的一页.

Bose 的论文《普朗克定律和光量子假说》中，用德布罗意关系 $p=\frac{h\nu}{c}$ 把相空间体积表示为

$$\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y\mathrm{d}p_z = V4\pi\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2\frac{h\mathrm{d}\nu}{c} = 4\pi\frac{h^3\nu^2}{c^3}V\mathrm{d}\nu \tag{1.16}$$

以$h^3$为相空间基元单位，考虑到偏振，从式(1.16)得到属于 $\mathrm{d}\nu$ 的相格数为

$$A = 8\pi V\frac{\nu^2\mathrm{d}\nu}{c^3} \tag{1.17}$$

令 $p_r^s$为包含有 $r$ 个频率为 $\nu^s$ 的振子(量子)的相格数，($s$ 标识不同的振动频率)，$A^s=\sum_r p_r^s$ 为所有的相格数，根据排列理论及各态历经假说，$A^s$ 的划分为

$$\frac{A^s!}{p_0^s!p_1^s!\cdots} \tag{1.18}$$

而

$$N^s = \sum_r rp_r^s \tag{1.19}$$

为所有的振子数(有 $r$ 个振子包含在 $p_r^s$). 由 $p_r^s$的分布来定义的状态的几率显然是

$$W = \prod_s \frac{A^s!}{p_0^s!p_1^s!\cdots} \tag{1.20}$$

考虑到可把 $p_r^s$ 看作是很大的数目，根据 Stirling 公式，对于大的数 $p_r^s$，有 $\lg p_r^s! \approx p_r^s(\lg p_r^s - 1)$，所以

$$
\begin{aligned}
\lg W &= \sum_s \left(\lg A^s! - \sum_r \lg p_r^s!\right) \\
&\approx \sum_s \left[A^s(\lg A^s - 1) - \sum_r p_r^s(\lg p_r^s - 1)\right] \\
&= \sum_s \left[A^s \lg A^s - \sum_r p_r^s \lg p_r^s\right] \qquad (1.21)
\end{aligned}
$$

对于能量 $E$，

$$E = \sum_s N^s h\nu^s$$

求条件极大值以对应热平衡态，条件是：$\delta E = 0$，即有 $\sum_r \delta p_r^s = 0$；以及 $\delta N^s = 0$，即 $\sum_r r\delta p_r^s = 0$. 于是通过变分和 Lagrange 乘子法可得

$$\sum_s \sum_r \delta p_r^s(1 + \lg p_r^s + \lambda^s) + \frac{1}{\beta} \sum_s h\nu^s \sum_r r\delta p_r^s = 0 \qquad (1.22)$$

式中，$\lambda^s$ 和 $\frac{1}{\beta}$ 为两个独立的不定乘子. 再利用 $\sum_r \delta p_r^s = 0$，得

$$\lg p_r^s + \lambda^s + \frac{h\nu^s r}{\beta} = 0$$

其解为

$$p_r^s = B^s \exp\left(-\frac{h\nu^s r}{\beta}\right) \qquad (1.23)$$

式中，$B^s$ 可由 $A^s = \sum_r p_r^s$ 及 $N^s = \sum_r r p_r^s$ 定出，

$$B^s = A^s(1 - e^{-\frac{h\nu^s}{\beta}}) \qquad (1.24)$$

于是得到

$$N^s = \sum_r r p_r^s = \frac{A^s \mathrm{e}^{-h\nu^s/\beta}}{1-\mathrm{e}^{-h\nu^s/\beta}} \tag{1.25}$$

从而 $A = 8\pi V \frac{\nu^2 \mathrm{d}\nu}{c^3}$，

$$E = \sum_s N^s h\nu^s = \sum_s 8\pi \frac{h\nu^{s3}\mathrm{d}\nu^s}{c^3} V \frac{\mathrm{e}^{-h\nu^s/\beta}}{1-\mathrm{e}^{-h\nu^s/\beta}} \tag{1.26}$$

利用热力学关系可定出 $\beta = kT$，即得普朗克公式. Bose 的推导实质上是把光量子视为光子性的粒子，属于同一相空间的元胞中的粒子是不可区分的.

## 1.3 利用广义 Hermann - Feynman 定理推导普朗克公式的尝试[3]

这一节，利用广义 Hermann - Feynman 定理[4]来重新得到辐射能量密度公式(或线性振子平均能量公式)，即式(1.1).

常见的 Hermann - Feynman 定理是[5]

$$\frac{\partial E_n}{\partial \chi} = \left\langle \psi_n \left| \frac{\partial H}{\partial \chi} \right| \psi_n \right\rangle \tag{1.27}$$

其中，含参量为$\chi$的哈密顿量 $H$ 的本征矢为$|\psi_n\rangle$，满足本征方程

$$H \mid \psi_n\rangle = E_n \mid \psi_n\rangle \tag{1.28}$$

在量子力学与量子化学中，许多有关能级的复杂问题都可以借助 Hermann - Feynman 定理进行分析计算，但是这个定理(1.27)只适用于纯态平均，对于由密度矩阵 $\rho$ 描述的混合态则不适用，因此非常有必要将式(1.27)进行推广.

对处于热平衡状态的混合态可以由如下的密度算符来描述：

$$\rho = \frac{1}{Z}\mathrm{e}^{-\beta H},\ \beta = (kT)^{-1} \tag{1.29}$$

其中，$Z = \mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-\beta H})$ 是配分函数，$k$ 是玻尔兹曼常数，$T$ 是温度. 所以哈密顿量 $H$ 的系综平均即为

$$\langle H(\chi)\rangle_{\mathrm{e}} = \mathrm{Tr}[\rho H(\chi)] = \frac{1}{Z(\chi)}\sum_j \mathrm{e}^{-\beta E_j(\chi)} E_j(\chi) \equiv \overline{E}(\chi) \tag{1.30}$$

其中，下脚标 e 表示系综平均. 对于任意算符 $A$ 则有系综平均

$$\langle A\rangle_{\mathrm{e}} \equiv \mathrm{Tr}(A\mathrm{e}^{-\beta H})/\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-\beta H}) \tag{1.31}$$

对式(1.30)做$\chi$的偏微分得到

$$\frac{\partial}{\partial\chi}\langle H\rangle_{\mathrm{e}} = \frac{1}{Z(\chi)}\left\{\sum_j \mathrm{e}^{-\beta E_j(\chi)}[-\beta E_j(\chi) + \beta\langle H\rangle_{\mathrm{e}} + 1]\frac{\partial E_j(\chi)}{\partial\chi}\right\} \tag{1.32}$$

再由式(1.27)，则方程(1.32)可以写为

$$\frac{\partial}{\partial\chi}\langle H\rangle_{\mathrm{e}} = \left\langle(1 + \beta\langle H\rangle_{\mathrm{e}} - \beta H)\frac{\partial H}{\partial\chi}\right\rangle_{\mathrm{e}} \tag{1.33}$$

又由于($H$ 是不显含 $\beta$ 的)

$$\begin{aligned}\left\langle H\frac{\partial H}{\partial\chi}\right\rangle_{\mathrm{e}} &= \mathrm{Tr}\left(\mathrm{e}^{-\beta H}H\frac{\partial H}{\partial\chi}\right)/\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-\beta H}) \\ &= \left[-\frac{\partial}{\partial\beta}\mathrm{Tr}\left(\mathrm{e}^{-\beta H}\frac{\partial H}{\partial\chi}\right)\right]/\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-\beta H}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\mathrm{Tr}\left(\mathrm{e}^{-\beta H}\frac{\partial H}{\partial\chi}\right)/\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-\beta H})\right] + \\ &\quad \mathrm{Tr}(H\mathrm{e}^{-\beta H})\mathrm{Tr}\left(\mathrm{e}^{-\beta H}\frac{\partial H}{\partial\chi}\right)/[\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-\beta H})]^2 \\ &= -\frac{\partial}{\partial\beta}\left\langle\frac{\partial H}{\partial\chi}\right\rangle_{\mathrm{e}} + \left\langle\frac{\partial H}{\partial\chi}\right\rangle_{\mathrm{e}}\langle H\rangle_{\mathrm{e}}\end{aligned} \tag{1.34}$$

所以式(1.33)变为

$$\frac{\partial}{\partial\chi}\langle H\rangle_e = \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\beta\left\langle\frac{\partial H}{\partial\chi}\right\rangle_e\right] = \left(1+\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\left\langle\frac{\partial H}{\partial\chi}\right\rangle_e \tag{1.35}$$

对式(1.35)做 $d\beta$ 积分给出($K$ 是积分常数)

$$\beta\left\langle\frac{\partial H(\chi)}{\partial\chi}\right\rangle_e = \int d\beta\frac{\partial}{\partial\chi}\langle H\rangle_e + K \tag{1.36}$$

做 $d\chi$ 积分则给出

$$\langle H\rangle_e = \int_0^\chi\left(1+\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\left\langle\frac{\partial H}{\partial\chi}\right\rangle_e d\chi + \langle H(0)\rangle_e \tag{1.37}$$

当然也可以计算

$$(\Delta H)^2 = \langle H^2\rangle_e - \overline{E}^2 = -\frac{\partial\langle H\rangle_e}{\partial\beta} \tag{1.38}$$

综合以上所述,广义 Hermann - Feynman 定理为

$$\frac{\partial}{\partial\chi}\langle H\rangle_e = \left\langle(1+\beta\langle H\rangle_e - \beta H)\frac{\partial H}{\partial\chi}\right\rangle_e \tag{1.39}$$

当 $H$ 与 $\beta$ 无关时,方程(1.39)可以写为

$$\frac{\partial}{\partial\chi}\langle H\rangle_e = \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\beta\left\langle\frac{\partial H}{\partial\chi}\right\rangle_e\right] \tag{1.40}$$

以下看看对于谐振子哈密顿量 $H = \hbar\omega a^\dagger a$ 使用广义 Hermann - Feynman 定理能得到什么,现在用式(1.40)推导 Planck 公式

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\omega}\langle H\rangle_e &= \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\beta\left\langle\frac{\partial H}{\partial\omega}\right\rangle_e\right] = \frac{\partial}{\partial\beta}[\beta\langle\hbar a^\dagger a\rangle_e] \\ &= \frac{\partial}{\omega\,\partial\beta}[\beta\langle\hbar\omega a^\dagger a\rangle_e] = \frac{\partial}{\omega\,\partial\beta}[\beta\langle H\rangle_e] \\ &= \frac{1}{\omega}\langle H\rangle_e + \frac{\beta\partial}{\omega\,\partial\beta}[\langle H\rangle_e]\end{aligned} \tag{1.41}$$

即

$$\left(\omega\frac{\partial}{\partial\omega}-\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\langle H\rangle_e=\langle H\rangle_e \tag{1.42}$$

利用特征函数方法[6]得到

$$\frac{d\omega}{\omega}=-\frac{d\beta}{\beta}=\frac{d\langle H\rangle_e}{\langle H\rangle_e} \tag{1.43}$$

积分得

$$\ln\omega=-\ln\beta+C_1,\ \ln\langle H\rangle_e-\ln\omega=C_2 \tag{1.44}$$

由此给出

$$\langle H\rangle_e=\omega F(\beta\omega) \tag{1.45}$$

可以验证式(1.45),注意到

$$\omega\frac{\partial}{\partial\omega}=\frac{\partial}{\partial\ln\omega},\text{令}\ \ln\omega\equiv x,\ \ln\beta\equiv y \tag{1.46}$$

可将式(1.42)改写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-1\right)\langle H\rangle_e=\frac{\partial}{\partial y}[\langle H\rangle_e] \tag{1.47}$$

它的解为

$$\langle H\rangle_e=e^x g(x+y)=\omega F(\beta\omega) \tag{1.48}$$

为了决定式(1.45)中 $F$ 的形式,引入 $a=\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}Q+\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}P\right)/\sqrt{2}$,精确到一个零点能的范围内,

$$H=\frac{P^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2Q^2 \tag{1.49}$$

可以看到,当 $\omega\to 0$, $H\to\frac{P^2}{2m}$ (自由粒子),式(1.45)就变为

$$\lim\langle H\rangle_e=\lim\omega F(\beta\omega),\ (\omega\to 0) \tag{1.50}$$

所以当 $\lim_{\omega\to 0}\omega F(\beta\omega)$ 是有限时，就有

$$\lim_{\omega\to 0}F(\beta\omega)\to\infty \tag{1.51}$$

另一方面，回忆自由粒子密度算符 $\rho$ 的布洛赫方程

$$-\frac{\partial\rho(p,\beta)}{\partial\beta}=\frac{p^2}{2m}\rho(p,\beta) \tag{1.52}$$

它的归一化解为

$$\rho(p,\beta)=\sqrt{\frac{\beta}{2m\pi}}\exp[-\beta p^2/(2m)],\ \mathrm{Tr}\rho=1 \tag{1.53}$$

所以 $H_f=\frac{P^2}{2m}$ 的能量平均为

$$\begin{aligned}\langle H_f\rangle_e &\equiv\left\langle\frac{P^2}{2m}\right\rangle_e=\sqrt{\frac{\beta}{2m\pi}}\int\mathrm{d}p\,\frac{p^2}{2m}\exp[-\beta p^2/(2m)]\\ &=\sqrt{\frac{\beta}{2m\pi}}\left(-\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\int\mathrm{d}p\exp[-\beta p^2/(2m)]\\ &=\frac{1}{2\beta}=\frac{kT}{2}\end{aligned} \tag{1.54}$$

比较式(1.54)和(1.50)给出

$$\langle H_f\rangle_e=\lim_{\omega\to 0}\langle H\rangle_e=\lim_{\omega\to 0}\omega F(\beta\omega)=0\times\infty=\frac{1}{2\beta} \tag{1.55}$$

这告诉我们利用洛必达规则可以将不定形变为确定形. 很明显地，

$$\frac{1}{\beta}=\lim_{\omega\to 0}\frac{\hbar}{\beta\hbar e^{\beta\hbar\omega}} \tag{1.56}$$

由于洛必达规则是用求导数来计算出含不定型(这里是 $0\times\infty$)的极限，可以看出最简单的表达式，它在用洛必达规则后能接近到

$\lim_{\omega\to 0}\dfrac{\hbar}{\beta\hbar e^{\beta\hbar\omega}}$ 的是

$$\hbar\lim_{\omega\to 0}\omega\times\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}=\lim_{\omega\to 0}\frac{\hbar}{\beta\hbar e^{\beta\hbar\omega}} \tag{1.57}$$

比较式(1.57)、(1.56)和(1.55)并考虑到式(1.51)，得到 $F(\beta\omega)$ 的形式为

$$F(\beta\omega)=\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1} \tag{1.58}$$

那么就有

$$\langle H\rangle_e=\frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1} \tag{1.59}$$

这样我们就利用广义 Hermann - Feynman 定理得到了辐射能量密度公式，另外，又可得到如下两条性质.

(1) 平均动能等于平均势能. 由对易关系

$$[QP,\ H]=\mathrm{i}\,\frac{P^2}{m}-\mathrm{i}m\omega^2Q^2 \tag{1.60}$$

所以

$$0=\langle[QP,H]\rangle_e=\mathrm{i}\left\langle\frac{P^2}{m}\right\rangle_e-\mathrm{i}\langle m\omega^2Q^2\rangle_e \tag{1.61}$$

即

$$\begin{aligned}\langle H\rangle_e&=\left\langle\frac{P^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2Q^2\right\rangle_e\\&=\left\langle\frac{P^2}{m}\right\rangle_e=\langle m\omega^2Q^2\rangle_e\end{aligned} \tag{1.62}$$

(2) 虽然 $H$ 和质量有关，但 $\langle H\rangle_e$ 却和质量 $m$ 无关. 实际上，由式(1.62)和(1.27)立即给出

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial m}\langle H\rangle_e &= \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\beta\left\langle\frac{\partial H}{\partial m}\right\rangle_e\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial\beta}\left\langle\beta\left(\frac{1}{2}\omega^2 Q^2 - \frac{P^2}{2m}\right)\right\rangle_e \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{1.63}
$$

从以上几节的讨论中,我们看到普朗克的理论推导是如何导致发现了划时代革命性的量子假说的,懂得这个推导过程的人中谁会说理论不重要呢,当实验给出模棱两可的测量数据后,是理性思考使人们摆脱困境,迎来曙光. 另一方面,从另外两种推导普朗克公式的方法中可以得出结论:对真理的追求往往可以是殊途同归的. 诚如费曼所说:"用一种新观点来认识老事物,乃是一种乐趣".

## 参考文献


[1] Feynman R P. Statistical Physics [M]. Mass: W. A. Benjamin, 1972.

[2] 吴大猷. 量子力学 [M]. 新加坡:世界科学出版社, 1986.

[3] Fan Hongyi, Jiang Nianquan. Energy average formula of photon gas rederived by using the generalized Hermann-Feynman theorem [J]. Chin. Phys. B, 2010, 19, 090301.

[4] Fan Hongyi, Chen Bozhan. Generalized Feynman-Hellman theorem for ensemble average values [J]. Phys. Lett. A, 1995, 203: 95 - 101.

[5] Hellmann H. Einfuhrung in die Quantenchemie [M]. F. Deuticke, Leipzig, 1937.
Feynmann R P. Forces in Molecules [J]. Phys. Rev. 1939, 56: 340 - 343.

[6] Orszag M. Quantum Optics [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2000.

# 第2章　发展 Dirac 符号法的有序算符内的积分技术(IWOP 技术)

## 2.1　Dirac 符号法给予的启示

现代科学始于17世纪牛顿-莱布尼茨创立的微积分.数学史在这个时期竖立起了一座里程碑——牛顿和莱布尼茨各自独立发明了微积分.现在,这门数学技术早已成为每个理工科学生的必修功课,其重要性就相当于绕口令之于相声演员,腹式呼吸之于歌唱家.在这以后,积分学有两个发展方向,在19世纪,泊松将复数引入微积分,美国数学史家克兰说:"泊松是第一个沿着复平面上的路径实行积分的人".20世纪初,勒贝格将微积分推广到被积函数不可微的情形,并由此创立了实变函数论.微积分作为数学工具而言,其能力看上去已经相当强大了.

沿着物理专业的经典教科书一路翻下来,微积分运算就像空气一样自然而且无处不在,弥漫在字里行间.直到20世纪二三十年代狄拉克(Dirac)的名著《量子力学原理》,微积分运算才在由 ket - bra 符号组成的算符面前遇到了困难,戛然而止,原因无外乎对于那些不可对易的算符,风光无限的微积分感到了束手无策.

狄拉克以神来之笔发明了量子力学的符号法来阐述量子论,他用右矢$|\rangle$与左矢$\langle|$描写态矢量与共轭态矢量,从记号上看是一目了然,浅显易懂.微积分的发明者之一,德国数学家莱布尼茨曾说:"要发明,就得挑选恰当的符号,要做到这一点,就要用含义简明的少量符号来表达或比较忠实地描绘事物的内在本质,从而最大限度地减少人的思维劳动."例如 $\mathrm{d}q$ 与$\int$都是他发明的.我国古

人发明的象形文字是世界上最优秀的符号系统，例如，屋檐(宀)下有豕就成“家”字，所以猪是人类最亲情的家畜；月光抚窗即为明.如果说莱布尼茨是数学界里最伟大的符号学者，那么狄拉克就是物理学界的最伟大的符号学者.一个好的物理符号，除了应具备好的数学符号具备的简洁性、形象性、关系性外，还要能抽象并深刻地反映物理内容.就狄拉克创造的右矢$|\rangle$与左矢$\langle|$来说，它形象地反映一个入态$|\rangle_{in}$经过一个仪器的作用(以算符$\hat{A}$表示)而成为出态$_{out}\langle|$，即形成一个跃迁矩阵元$_{out}\langle|\hat{A}|\rangle_{in}$.它又能反映关系性，即$\langle|\rangle$代表内积，而$|\rangle\langle|$代表算符，因为$|\rangle\langle|$作用到一个态$|\rangle$得到另一个态$|\rangle$.$|\rangle$的里面可以填写任何物理可观测量的信息以表征这个态.所以Dirac符号从它的诞生之日起就得到人们的青睐并沿用至今，而狄拉克本人也对这套符号法特别钟爱，认为它是“永垂不朽”的.

但是在欣赏符号法的过程中，正如人们在欣赏艺术品时往往会出现的情况那样，是“外貌人人看得见，涵义只有有心人得之，形式的背后对于大多数人是一个秘密.”所以Dirac说：“……符号法，用抽象的方式直接地处理有根本重要意义的一些量……”，“但是符号法看来更能深入事物的本质，它可以使我们用简洁精练的方式来表达物理规律，很可能在将来当它变得更为人们所了解，而且它本身的特殊数学得到发展时，它将更多地被人们所采用”.可是，“微雨夜来过，不知春草生”，一代接一代的人们看过和学过Dirac的书及相关文章何止几遍，但如何直接地去发展符号法却长期找不到门.

这里我们要反“人云亦云、一般化的，没有自己独特的创新东西”而行之，即揭示出对连续态矢组成的投影算符$|f(q)\rangle\langle q|$是可以积分的(当然此积分要收敛).这就为牛顿-莱布尼茨积分学开拓了一个新的用武之“空间”.我们首创有序算符内的积分方法(IWOP方法)去有效处理ket－bra型算符的积分，从而使得量子力学的表象论与变换论“统一与和谐”，也进一步揭示符号法理论

的内在完备性、对称性和逻辑简单性.

中国古典哲学家老子曾说:“道可道,非常道.”Dirac 的符号法需要我们去开启去悟“道”,用心智去体会“美”,在这样做的过程中,我们对理论物理的感觉就得到了升华,素质就得到了提高.

## 2.2 坐标表象、动量表象和粒子数表象

用以描述不同坐标系下微观粒子体系的状态和力学量的具体表示形式称为量子力学中的“表象”,最早由 Dirac 引入. 他把系统状态的波函数看成抽象空间中的态矢量在某个表象中的表示,力学量的本征函数即此空间的一组基矢. 基矢完备性是构成表象的必要条件,但完备性的证明则因其烦琐和缺乏普适而有力的积分方法而成为历来困扰物理学家的一个难题,这极大地限制了新表象的发现. 由于针对不同的问题选取适当的表象进行求解往往可以达到事半功倍的效果,而新表象的缺乏也使得对量子力学中某些问题的探讨变得相当困难. IWOP 技术恰恰提供了构建各种新的表象的有效方法. 它赋予基本坐标、动量表象的完备关系,以清晰的数学内涵并将其化为纯高斯积分的形式,从而使其成为对于数学家而言“如同 2×2=4 一样简单的东西”;它也可以简化相干态完备性的证明,其结果与通常的展开相干态为粒子数态(Fock 表象)的方法殊途同归;我们发现,通过把正规乘积序排列的高斯型积分算符(其积分为 1)进行分解,化为投影算符,就可发现大量新表象,如多粒子纠缠态表象、相干纠缠态表象等,它们的出现使量子力学理论绚丽多彩.

在介绍 IWOP 技术之前,我们需要回顾一些必要的基础知识.

令 $Q$、$P$ 分别为厄米的坐标和动量算符,满足 Heisenberg 正则对易关系($\hbar$ 为普朗克常量)[1]

$$[Q,\ P] = \mathrm{i}\hbar. \tag{2.1}$$

$Q$ 和 $P$ 的本征态分别是 $|q\rangle$ 和 $|p\rangle$，则有

$$Q \mid q\rangle = q \mid q\rangle, \quad \langle q' \mid q\rangle = \delta(q'-q); \qquad (2.2)$$
$$P \mid p\rangle = p \mid p\rangle, \langle p' \mid p\rangle = \delta(p'-p);$$

且

$$\langle q \mid P = -\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\langle q \mid, \langle p \mid Q = \mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\langle p \mid, \qquad (2.3)$$

Dirac 给出的完备性关系是

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q \mid q\rangle\langle q \mid = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \mid p\rangle\langle p \mid = 1. \qquad (2.4)$$

为了求 $|q\rangle$ 与 $|p\rangle$ 的具体形式，一般的做法是，引入 Fock 态，这可以从谐振子哈密顿量的因式分解法（factorization method）加以说明. 在因式分解中引入了升、降算符概念，把谐振子相邻能级的本征态联系起来. 一维谐振子的哈密顿量是

$$H = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 Q^2, \qquad (2.5)$$

用 $Q$ 和 $P$ 定义湮灭算符 $a$ 和产生算符 $a^\dagger$，$a^\dagger$ 是 $a$ 的厄米共轭，即

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}Q + \mathrm{i}\frac{P}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right], \qquad (2.6)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}Q - \mathrm{i}\frac{P}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right], \qquad (2.7)$$

则易得

$$[a, a^\dagger] = 1 \qquad (2.8)$$

一维谐振子的哈密顿量可改写为

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right), \qquad (2.9)$$

定义粒子数算符 $N = a^\dagger a$，它的本征态记为$|n\rangle$，则有

$$\langle n | N | n\rangle = | a | n\rangle |^2 \geqslant 0,$$

$|n\rangle$中的最低一个态$|0\rangle$为基态，则必然有 $a | 0\rangle = 0$. 容易证明

$$| n\rangle = \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} | 0\rangle, \tag{2.10}$$

$|n\rangle$张成的空间是完备的

$$\sum_{n=0}^{\infty} | n\rangle\langle n | = 1, \tag{2.11}$$

而且

$$\begin{aligned} a | n\rangle &= \sqrt{n} | n-1\rangle, \\ a^\dagger | n\rangle &= \sqrt{n+1} | n+1\rangle, \end{aligned} \tag{2.12}$$

基态$|0\rangle$的波函数$\langle q|0\rangle$可由下式给出：

$$\begin{aligned} 0 = \langle q | a | 0\rangle &= \langle q | \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}Q + \mathrm{i}\frac{P}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right] | 0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\right)\langle q | 0\rangle, \end{aligned} \tag{2.13}$$

即

$$\langle q | 0\rangle = c\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right], \tag{2.14}$$

其中 $c$ 是归一化常数，可以由下式定出

$$\begin{aligned} 1 = \langle 0 | 0\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\langle 0 | q\rangle\langle q | 0\rangle \\ &= | c |^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right] \end{aligned}$$

$$=|c|^2\sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}}. \tag{2.15}$$

所以

$$\langle q\mid 0\rangle=\left(\frac{\pi\hbar}{m\omega}\right)^{-\frac{1}{4}}\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right]. \tag{2.16}$$

以下为方便起见,取自然单位 ($\hbar=\omega=m=1$),则由式(2.4),(2.10)和(2.16)得

$$\begin{aligned}\langle q\mid n\rangle&=\frac{1}{\sqrt{n!}}\int_{-\infty}^{\infty}\langle q\mid a^{\dagger n}\mid q'\rangle\langle q'\mid 0\rangle\mathrm{d}q'\\&=\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q'\left(q-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\right)^n\delta(q-q')\langle q'\mid 0\rangle\\&=\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\left(q-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\right)^n\mathrm{e}^{-\frac{q^2}{2}}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

利用 Hermite 多项式表达式

$$\mathrm{H}_n(q)=\mathrm{e}^{\frac{q^2}{2}}\left(q-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\right)^n\mathrm{e}^{-\frac{q^2}{2}} \tag{2.18}$$

或

$$\mathrm{H}_n(q)=\mathrm{e}^{q^2}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\right)^n\mathrm{e}^{-q^2}=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-)^k n!}{k!(n-2k)!}(2q)^{n-2k}. \tag{2.19}$$

则式(2.18)变为

$$\langle q\mid n\rangle=\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\mathrm{e}^{\frac{-q^2}{2}}\mathrm{H}_n(q), \tag{2.20}$$

由式(2.11)和式(2.20),可以写出坐标本征态$|q\rangle$的 Fock 表象

$$
\begin{aligned}
|q\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|q\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}} \mathrm{e}^{\frac{-q^2}{2}} \mathrm{H}_n(q) \\
&= \pi^{-1/4} \exp\left\{-\frac{q^2}{2} + \sqrt{2} q a^{\dagger} - \frac{a^{\dagger 2}}{2}\right\} |0\rangle,
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

其中用了 Hermite 多项式的母函数公式

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{H}_n(q)}{n!} t^n = \exp(2qt - t^2). \tag{2.22}
$$

类似地可以导出

$$
\begin{aligned}
\langle p|n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p' \langle p|a^{\dagger n}|p'\rangle\langle p'|0\rangle \\
&= \frac{(-\mathrm{i})^n}{\sqrt{2^n n!}} \left(p - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\right)^n \langle p|0\rangle \\
&= \frac{(-\mathrm{i})^n}{\sqrt{2^n n!}\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{\frac{-p^2}{2}} \mathrm{H}_n(p),
\end{aligned} \tag{2.23}
$$

于是,动量本征态的 Fock 表象为

$$
\begin{aligned}
|p\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|p\rangle \\
&= \pi^{-1/4} \mathrm{e}^{\frac{-p^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{i}a^{\dagger}}{\sqrt{2}}\right)^n \frac{1}{n!} \mathrm{H}_n(p) \\
&= \pi^{-1/4} \exp\left\{-\frac{p^2}{2} + \sqrt{2}\mathrm{i} p a^{\dagger} + \frac{a^{\dagger 2}}{2}\right\} |0\rangle,
\end{aligned} \tag{2.24}
$$

当恢复 $m$, $\omega$, $\hbar$ 后,$|q\rangle$ 和 $|p\rangle$ 的表达式应分别是

$$
|q\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{-1/4} \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar} q^2 + \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} q a^{\dagger} - \frac{a^{\dagger 2}}{2}\right\} |0\rangle, \tag{2.25}
$$

$$|p\rangle = \left(\frac{1}{m\omega\hbar\pi}\right)^{-1/4}\exp\left\{-\frac{p^2}{2m\omega\hbar}+\sqrt{\frac{2}{m\omega\hbar}}\mathrm{i}pa^\dagger+\frac{a^{\dagger 2}}{2}\right\}|0\rangle. \tag{2.26}$$

注意：$\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q$，$p\sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}}$ 都为无量纲算符. 在讲述过 IWOP 技术后，我们将指出这两式的推导可以是非常直接的，不须用 Fock 表象作中介，请参见式(2.54). 可以证明$\langle q|$与$|p\rangle$的内积是

$$\langle q \mid p\rangle = (2\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}qp}{\hbar}\right). \tag{2.27}$$

这恰是 Fourier 变换的核.

**思考题：**

1. Hankel 变换核所对应的量子力学表象变换是什么？

2. 由于 $\langle q|P=\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\langle q|$，即动量 $P$ 在坐标表象里是一个微商运算，所以可以想象它的逆算符是一个积分运算

$$\frac{1}{P}=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{-\infty}^{q}\mathrm{d}q',\quad \frac{1}{Q}=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{-\infty}^{p}\mathrm{d}p'. \tag{2.28}$$

那么$\frac{1}{P}$与$\frac{1}{Q}$可否用 $a$ 和 $a^\dagger$ 的级数作展开呢？

## 2.3 有序算符内的积分技术[2-6]

本节介绍如何用正规乘积内的积分技术发展符号法，以便对 Dirac 符号法有更深刻的了解.

虽然正规乘积起源于量子场论，并在 Louisell 的书(辐射的量子理论)中有所介绍，我们觉得对其有关性质需作进一步阐明. 关于玻色算符 $a$ 和 $a^\dagger$ 的任何多项式函数不失为一般性可写为

$$f(a,a^\dagger)=\sum_j\cdots\sum_m a^{\dagger j}a^k a^{\dagger l}\cdots a^m f(j,k,l,\cdots,m)$$

其中 $j, k, l, \cdots, m$ 是正整数或零. 利用玻色算符对易关系 $[a, a^\dagger]=1$, 总可以将所有的产生算符 $a^\dagger$ 都移到所有湮灭算符 $a$ 的左边,这时称 $f(a, a^\dagger)$已被排列成正规乘积形式,以 $:\quad:$ 标记[7]. 其有关性质是:

(1) 在正规乘积内部玻色子算符相互对易,即 $a^\dagger a = :a^\dagger a:$, 又因 $a^\dagger a = :aa^\dagger:$,所以又有 $:a^\dagger a: = :aa^\dagger:$.

(2) $C$ 数可以自由出入正规乘积记号.

(3) 由于性质(1),故可对正规乘积内的 $C$ 数进行积分或微分运算,前者要求积分收敛.

(4) 正规乘积内的正规乘积记号可以取消.

(5) 正规乘积 $:W:$ 与正规乘积 $:V:$ 之和为 $:(W+V):$.

(6) 正规乘积算符 $:f(a^\dagger, a):$ 的相干态矩阵元为 $\langle z'|:f(a^\dagger, a):|z\rangle = f(z'^*, z)\langle z'|z\rangle$.

(7) 真空投影算符 $|0\rangle\langle 0|$ 的正规乘积展开式是 $|0\rangle\langle 0| = :\mathrm{e}^{-a^\dagger a}:$.

下面给出(7)的严格证明,由粒子态的完备性可得

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| \\
&= \sum_{n, n'=0}^{\infty} |n\rangle\langle n'| \frac{1}{\sqrt{n!n'!}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^*}\right)^n (z^*)^{n'}\Big|_{z^*=0} \\
&= \exp\left(a^\dagger \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^*}\right)|0\rangle\langle 0| \mathrm{e}^{z^* a}\Big|_{z^*=0},
\end{aligned} \tag{2.29}
$$

设 $|0\rangle\langle 0| = :W:$,($W$ 待定),则

$$
\begin{aligned}
1 &= \exp\left(a^\dagger \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^*}\right):W:\mathrm{e}^{z^* a}\Big|_{z^*=0} \\
&= :\exp\left(a^\dagger \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^*}\right)W\mathrm{e}^{z^* a}:\Big|_{z^*=0} \\
&= :\mathrm{e}^{a^\dagger a}W: = :\mathrm{e}^{a^\dagger a}:W::,
\end{aligned} \tag{2.30}
$$

即，有 $|0\rangle\langle 0| = :W: = :e^{-a^\dagger a}:$ 成立. 利用这个关系可得

$$
\begin{aligned}
N(N-1)\cdots(N-l+1) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-l+1)\,|n\rangle\langle n| \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} :\frac{a^{\dagger n}a^{n}}{(n-l)!}e^{-a^\dagger a}: = a^{\dagger l}a^{l},
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
|0\rangle\langle 0| &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l a^{\dagger l}a^{l}}{l!} \\
&= 1 - N + \frac{1}{2!}N(N-1) - \frac{1}{3!}N(N-1)(N-2) + \cdots
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

(8) 厄米共轭操作可以进入 $:\ :$ 内部进行，即 $:(W\cdots V):^\dagger = :(W\cdots V)^\dagger:$，这条也与性质(1)密切相关，例如 $:(a^n a^{\dagger m})^\dagger: = :a^m a^{\dagger n}: = a^{\dagger n}a^m$.

(9) 正规乘积内部以下两个等式成立，它们也来源于性质(1).

$$
\begin{aligned}
&:\frac{\partial}{\partial a}f(a,a^\dagger): = [:f(a,a^\dagger):, a^\dagger], \\
&:\frac{\partial}{\partial a^\dagger}f(a,a^\dagger): = [a, :f(a,a^\dagger):].
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

对于多模情况，式(2.33)可作如下推广

$$
\begin{aligned}
&:\frac{\partial}{\partial a_i\,\partial a_j}f(a_i, a_j, a_i^\dagger, a_j^\dagger): \\
&= [[:f(a_i, a_j, a_i^\dagger, a_j^\dagger):, a_j^\dagger], a_i^\dagger].
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

正因为有了正规乘积的这一系列性质，就可以很顺利地处理形如

$$
\sqrt{\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\,|\mu p\rangle\langle p|
\tag{2.35}
$$

的 ket - bra 型算符，它是经典数 $p$ 变成 $\mu p$ 在量子相空间中的映射，一旦完成这个积分，就可以知道相应的量子算符.

## 2.4 正规乘积算符内积分法求压缩算符

爱因斯坦坚信这样的观点："创造者只能记住最简单的解决办法，并坚信这种简单化同样应该使世界变成可知的世界."遵循这个观点，根据上述的对算符函数的积分思想，具体处理式(2.35). 现将式(2.24)代入，并令 $\hbar=\omega=m=1$，得

$$\sqrt{\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\,|\mu p\rangle\langle p| = \sqrt{\frac{\mu}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\exp\left(-\frac{\mu^2p^2}{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}p\mu a^{\dagger}+\frac{1}{2}a^{\dagger 2}\right)\times |0\rangle\langle 0|\exp\left(-\frac{p^2}{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}pa+\frac{1}{2}a^2\right), \tag{2.36}$$

把 $|0\rangle\langle 0| = :e^{-a^{\dagger}a}:$ 代入，得

$$\sqrt{\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\,|\mu p\rangle\langle p| = \sqrt{\frac{\mu}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\exp\left(-\frac{\mu^2p^2}{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}p\mu a^{\dagger}+\frac{1}{2}a^{\dagger 2}\right)\times :e^{-a^{\dagger}a}:\exp\left(-\frac{p^2}{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}pa+\frac{1}{2}a^2\right), \tag{2.37}$$

可以看出，在 $:e^{-a^{\dagger}a}:$ 的左边是产生算符函数，右边是湮灭算符函数，根据前面的性质，整个被积的算符函数已经是正规乘积形式，所以可将左边的:移到第一个 exp 函数前，将右边的:移到第三个 exp 函数后. 根据性质(1)在：  ：内所有玻色子算符相互对易，就可以将三个 exp 函数进行指数上的普通加法，这样就实现了算符积分函数的 $c$ 数化. 于是式(2.37)写成

$$\sqrt{\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\,|\mu p\rangle\langle p| = \sqrt{\frac{\mu}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p :\exp\left(-\frac{\mu^2+1}{2}p^2+\sqrt{2}\mathrm{i}p(\mu a^{\dagger}-a)+\frac{1}{2}(a^{\dagger}-a)^2\right):, \tag{2.38}$$

现在 $a$ 和 $a^\dagger$ 在 $:\ :$ 内对易，可被视为普通积分参数，利用性质(3)积分得

$$\sqrt{\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\mid\mu p\rangle\langle p\mid=\operatorname{sech}^{1/2}\lambda:\exp\left[-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\tanh\lambda+(\operatorname{sech}\lambda-1)a^\dagger a+\frac{a^2}{2}\tanh\lambda\right]:,\tag{2.39}$$

其中

$$\mathrm{e}^\lambda=\mu,\ \operatorname{sech}\lambda=\frac{2\mu}{1+\mu^2},\ \tanh\lambda=\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}.\tag{2.40}$$

进一步要去掉式(2.39)中的记号 $:\ :$，为此，用性质(1)，(2)和(5)导出算符恒等式

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\lambda a^\dagger a}&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\lambda n}\mid n\rangle\langle n\mid\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\lambda n}\frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}\mid n\rangle\langle n\mid\frac{a^n}{\sqrt{n!}}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}:\frac{1}{n!}(\mathrm{e}^\lambda a^\dagger a)^n\mathrm{e}^{-a^\dagger a}:\\&=:\exp[(\mathrm{e}^\lambda-1)a^\dagger a]:.\end{aligned}\tag{2.41}$$

则式(2.39)为

$$\begin{aligned}&\sqrt{\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\mid\mu p\rangle\langle p\mid\\&=\exp\left(-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\tanh\lambda\right)\exp\left[\left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right)\ln\operatorname{sech}\lambda\right]\exp\left(\frac{a^2}{2}\tanh\lambda\right)\\&\equiv S_1(\mu),\ \mathrm{e}^\lambda=\mu.\end{aligned}\tag{2.42}$$

这样就实现了对 ket - bra 符号算符的积分. 学过群论的人可以看出因为式(2.42)中 $a^{\dagger 2}/2$，$a^2/2$，$a^\dagger a+1/2$ 构成SU(1，1)李代数，单模压缩算符 $S_1$ 具有 SU(1，1)结构. 这里我们想起了 Dirac 于

1929 年 1 月在剑桥做的报告，题目是“不需要群论的量子力学”，意思是“群论只是包含某些不满足乘法对易律的量的一种理论，它不应当因此形成量子力学的一部分，因为，量子力学是所有不满足乘法对易律的量的一般理论. 所以，应该可以将群论的方法和结果转化成量子力学的语言，这样得到处理交换现象的一个方法，这对读者来说，就是不需要事先懂得群论.”以上我们的推导也不需要懂得群论，符合 Dirac 的观点. 看到式(2.42)的对称美，我们想起俄国莫斯科大学物理系大楼中有一堵特殊的墙壁，为来访的著名科学家题词用，玻尔和狄拉克都有题词在上. 狄拉克的题词为：“美和真在理论物理学中会合.” 真和美的表现形式往往是简洁的，爱因斯坦晚年，在回顾自己奋斗的一生时，曾经写道：

在漫长的科研生涯里，
我领悟到了一件事情：
我们的全部科学，
相对现实来掂量的话，
都是简单朴素而充满童趣的，
这才是我们拥有的最宝贵的东西.

小结以上的做法是：被积算符函数化成正规乘积内的积分形式，将 ∶ ∶ 内的玻色算符作积分参数处理，使积分得以实现. 当然，在积分过程中和积分后的结果中都含有 ∶ ∶ 记号. 如果将最后的结果的算符排成正规乘积形式，就可以将 ∶ ∶ 记号去掉. 此技术称为正规乘积内的积分技术.

记得物理学家 Freeman J. Dyson 曾说过：“一个好的科学家在面对重大发现时所做的第一件事就是尝试证明它错了.”经过反复地验证，肯定了式(2.42)没有错，这样就知道原来 Dirac 创造的投影符号是可以积分的，我们十分佩服 Dirac 的远见，即“它本身的数学得到发展时，它将更多地被人们所采用.” 这一事实也使我们想起 Dirac 的另一段话，“……一旦有了发现，它往往显得那么明显，以致人们奇怪为什么以前会没有人想到它.”于是，也使人再

一次追忆北宋文豪王安石的一个对联:“看似寻常最奇崛，成如容易却艰辛.”以上讨论也表明:投影算符具有测量算符的性质,在这个意义下,表象的完备性可以看成是测量的完备性,由此又可以看到波函数表达式 $\psi(x)=\langle x \mid \psi\rangle$ 中,等号左边的意义不如其右边的意义深刻,因为 $\langle x \mid \psi\rangle$ 隐含了投影算符 $|x\rangle\langle x|$ 对 $|\psi\rangle$ 的测量.

因为

$$S_1(\mu) \mid p\rangle=\sqrt{\mu} \mid \mu p\rangle, \quad S_1^{\dagger}(\mu) \mid p\rangle=1 / \sqrt{\mu} \mid p / \mu\rangle, \tag{2.43}$$

故知 $S_1(\mu)$ 为单模压缩算符,且有如下性质:

(1) 幺正性. 根据 $\langle p \mid p'\rangle=\delta(p-p')$, 则

$$\begin{aligned} S_1 S_1^{\dagger} &= \mu \int\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \mathrm{d}p' \mid \mu p\rangle\langle\mu p' \mid \delta(p-p') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \mid p\rangle\langle p \mid=1=S_1^{\dagger} S_1 . \end{aligned} \tag{2.44}$$

(2) 压缩性. 利用算符恒等式(Baker - Hausdorff 公式)

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{A} B \mathrm{e}^{-A} \\ = & B+[A, B]+\frac{1}{2!}[A,[A, B]]+\frac{1}{3!}[A,[A,[A, B]]]+\cdots, \end{aligned} \tag{2.45}$$

诱导出压缩变换

$$\begin{aligned} S_1 a S_1^{\dagger} &= a \cosh \lambda+a^{\dagger} \sinh \lambda, \\ S_1 a^{\dagger} S_1^{\dagger} &= a^{\dagger} \cosh \lambda+a \sinh \lambda, \end{aligned} \tag{2.46}$$

这就是著名的 Bogolyubov 变换(也称为压缩变换)[8],它被广泛地应用于量子光学、超导理论和原子核理论中. 上述讨论表明用 Dirac 的动量本征态按式(2.35)构造算符,并用 IWOP 技术积分后就给出诱导 Bogolyubov 变换的幺正算符;即在经典相空间中的尺度变换 $|p\rangle \rightarrow |\mu p\rangle$ 能够映射出量子幺正变换 $S_1 Q S_1^{-1}=\mu Q$,

$S_1 P S_1^{-1} = P/\mu.$

若在经典相空间作如下的正则变换 $q_1 \to q_1 \cosh\lambda + q_2 \sinh\lambda$，$q_2 \to q_2 \cosh\lambda + q_1 \sinh\lambda$；则可以映射出双模压缩算符. 记双模坐标本征态是 $|q_1, q_2\rangle = |q_1\rangle |q_2\rangle$，构造如下积分型算符并用有序算符内积分技术计算出

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2 \ |q_1 \cosh\lambda + q_2 \sinh\lambda,\ q_1 \sinh\lambda + q_2 \cosh\lambda\rangle\langle q_1 q_2| \\
&= \frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2 \ : \exp\{-\cosh^2\lambda(q_1^2 + q_2^2) - q_1 q_2 \sinh 2\lambda + \\
&\quad \sqrt{2}(q_1 \cosh\lambda + q_2 \sinh\lambda) a_1^\dagger + \sqrt{2}(q_1 \sinh\lambda + q_2 \cosh\lambda) a_2^\dagger - \\
&\quad \frac{1}{2}(a_1 + a_1^\dagger)^2 - \frac{1}{2}(a_2 + a_2^\dagger)^2 + \sqrt{2}(q_1 a_1 + q_2 a_2)\} : \\
&= \operatorname{sech}\lambda : \exp\{(a_1^\dagger a_2^\dagger - a_1 a_2)\tanh\lambda + (a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2) \\
&\quad (\operatorname{sech}\lambda - 1)\} :.
\end{aligned} \tag{2.47}
$$

其中用了双模真空态的正规乘积展开形式

$$
|00\rangle\langle 00| = : \exp(-a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2) : \tag{2.48}
$$

再利用式(2.41)，得

$$
\begin{aligned}
S_2 = {} & \exp(a_1^\dagger a_2^\dagger \tanh\lambda) \exp[(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1)\ln \operatorname{sech}\lambda] \\
& \exp(-a_1 a_2 \tanh\lambda).
\end{aligned} \tag{2.49}
$$

可以看出 $S_2$ 也具有 SU(1, 1)李代数结构，即 $a_1^\dagger a_2^\dagger$，$a_1 a_2$，$(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1)$ 构成 SU(1, 1)李代数的生成元. 且能诱导出下列的双模压缩变换

$$
\begin{aligned}
S_2 a_1 S_2^{-1} &= a_1 \cosh\lambda - a_2^\dagger \sinh\lambda, \\
S_2 a_2 S_2^{-1} &= a_2 \cosh\lambda - a_1^\dagger \sinh\lambda.
\end{aligned} \tag{2.50}
$$

这些例子都表明了：Dirac 的符号是可以用 IWOP 技术积分的，构造有物理意义的不对称的 ket - bra 积分式并积分之，就可以从 Dirac 的基本表象出发构造出许多量子力学幺正变换，从而定义新

的量子力学态矢.

作为应用,考虑由 1 模和 2 模构成的一个双模压缩真空态 $\frac{1}{s^*}\exp\left(\frac{r}{s^*}a_1^\dagger a_2^\dagger\right)|00\rangle$,若对 1 模的测量发现它处于一个单模压缩真空态 $\mathrm{sech}^{1/2}\tau\exp\left(\frac{a_1^{\dagger 2}}{2}\tanh\tau\right)|0\rangle_1$,那么 2 模将塌缩到什么状态呢? 为此计算

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{s^*}\mathrm{sech}^{1/2}\tau_1\langle 0|\exp\left(\frac{a_1^2}{2}\tanh\tau\right)\exp\left(\frac{r}{s^*}a_1^\dagger a_2^\dagger\right)|00\rangle \\
&=\frac{1}{s^*}\mathrm{sech}^{1/2}\tau_1\langle 0|\exp\left(\frac{a_1^2}{2}\tanh\tau\right)\int\frac{\mathrm{d}^2z_1\mathrm{d}^2z_2}{\pi^2} \\
&\quad |z_1,z_2\rangle\langle z_1,z_2|\exp\left(\frac{r}{s^*}a_1^\dagger a_2^\dagger\right)|00\rangle \\
&=\frac{1}{s^*}\mathrm{sech}^{1/2}\tau\int\frac{\mathrm{d}^2z_1\mathrm{d}^2z_2}{\pi^2}|z_2\rangle\exp\{-|z_1|^2+z_1^2\frac{\tanh\tau}{2}+ \\
&\quad\frac{r}{s^*}z_1^*z_2^*-\frac{1}{2}|z_2|^2\} \\
&=\frac{1}{s^*}\mathrm{sech}^{1/2}\tau\int\frac{\mathrm{d}^2z_2}{\pi}\exp\left\{-|z_2|^2+z_2a_2^\dagger+\frac{\tanh\tau}{2}\left(\frac{r}{s^*}\right)^2(z_2^*)^2\right\}|0\rangle_2 \\
&=\frac{1}{s^*}\mathrm{sech}^{1/2}\tau\exp\left\{\frac{\tanh\tau}{2}\left(\frac{r}{s^*}\right)^2a_2^{\dagger 2}\right\}|0\rangle_2
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

式(2.51)说明:进行测量后的第二模场也是一个压缩场,它的压缩参数不仅依赖于原始的压缩参数 $\left(\frac{r}{s^*}\right)^2$(是 $\frac{r}{s^*}$ 的平方),而且还依赖于第一模场的压缩参数. 用此方法可以提高压缩量,这个例子也说明了量子纠缠也蕴含在双模压缩态中.

## 2.5 量子力学坐标、动量表象和相干态表象完备式的纯高斯型积分形式

初学量子力学时,坐标和动量表象的完备性常是作为坐标系

完备的基本常识(即在全空间找到粒子的几率为 1)来理解,给我们留下很少的思考余地,以致很难发掘出它的深层次数理结构;然而用 IWOP 技术处理表象的完备性却给人们以“柳暗花明又一村”的感觉. 如坐标表象现在可以进一步写为

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q\mid q\rangle\langle q\mid\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\pi}}:\exp\{-q^2+2q(a^\dagger+a)/\sqrt{2}-[(a+a^\dagger)/\sqrt{2}]^2\}:\\&=:\exp\left[\frac{(a+a^\dagger)^2}{2}-\frac{(a+a^\dagger)^2}{2}\right]:=1,\end{aligned}\tag{2.52}$$

考虑到 $\frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}=Q$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q\mid q\rangle\langle q\mid=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\pi}}:\mathrm{e}^{-(q-Q)^2}:=1.\tag{2.53}$$

这是一个纯 Gauss 积分,这使人想起有关英国物理学家 J. J. Thomson(汤姆孙——电子荷质比的首次测定者)的一个小故事,有一次在课堂上讲课,他用了“数学家”这个词,话还没有讲完,就转向学生说:“你们知道数学家是什么吗?”他走向黑板,在黑板上写下高斯积分: $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$, 然后用手指着这个公式向学生说:“数学家就是这样的人,他觉得这个公式很明显,就像 2×2=4 一样,Liouville 就是这样一个数学家.”

作为式(2.53)的应用,坐标表象的完备性可以写为

$$\begin{aligned}1&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\pi}}:\mathrm{e}^{-(q-Q)^2}:\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q\mid q\rangle\langle q\mid=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\pi}}:\exp\{-q^2+\\&\quad 2q(a^\dagger+a)/\sqrt{2}-[(a+a^\dagger)/\sqrt{2}]^2\}:\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{q^2}{2} + \sqrt{2} q a^{\dagger} - \frac{a^{\dagger 2}}{2}\right] : \exp(-a^{\dagger} a) : \times$$

$$\exp\left[-\frac{q^2}{2} + \sqrt{2} q a - \frac{a^2}{2}\right] \tag{2.54}$$

考虑到 $|0\rangle\langle 0| = :\exp(-a^{\dagger}a):$，立刻可以得到

$$|q\rangle = \exp\left[-\frac{q^2}{2} + \sqrt{2} q a^{\dagger} - \frac{a^{\dagger 2}}{2}\right]|0\rangle \tag{2.55}$$

可见不必求助于厄米多项式，仅从坐标表象的高斯积分形式，就可以很简洁地给出坐标本征态的具体表达形式.

作为式(2.53)的应用，可以立即导出算符 $e^{fQ^2}$ 的正规乘积展开，

$$e^{fQ^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{\pi}} : e^{-(q-Q)^2 + fq^2} := \frac{1}{\sqrt{1-f}} : \exp\left(\frac{f}{1-f} Q^2\right):, \tag{2.56}$$

所以

$$e^{fQ^2}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{1-f}} \exp\left(\frac{f}{2(1-f)} a^{\dagger 2}\right)|0\rangle \tag{2.57}$$

是一个单模压缩态. 同样，动量表象可以改写为高斯积分形式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp\, |p\rangle\langle p| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{\pi}} : \exp\{-p^2 + \sqrt{2} i (a^{\dagger} - a) + (a - a^{\dagger})^2/2\} :$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{\pi}} : e^{-(p-P)^2} := 1, \tag{2.58}$$

这里 $P = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^{\dagger} - a)$. 结合式(2.53)和式(2.58)可以得出以下的积分亦为 1，

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dp\,dq}{2\pi} : \exp\left\{-\frac{1}{2}(q-Q)^2 - \frac{1}{2}(p-P)^2\right\} := 1, \tag{2.59}$$

再注意到 $Q=\dfrac{a+a^{\dagger}}{\sqrt{2}}$, $P=\dfrac{a-a^{\dagger}}{\sqrt{2}\mathrm{i}}$，就可分解被积算符函数为

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{2\pi}:\exp\left\{-\frac{1}{2}(q^2+p^2)+\frac{1}{\sqrt{2}}(q+\mathrm{i}p)a^{\dagger}-a^{\dagger}a+\frac{1}{\sqrt{2}}(q-\mathrm{i}p)a\right\}:$$

$$=\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{4}(q^2+p^2)+\frac{1}{\sqrt{2}}(q+\mathrm{i}p)a^{\dagger}\right]:\mathrm{e}^{-a^{\dagger}a}:\times\exp\left[-\frac{1}{4}(q^2+p^2)+\frac{1}{\sqrt{2}}(q-\mathrm{i}p)a\right], \tag{2.60}$$

注意到 $|0\rangle\langle 0|=:\exp(-a^{\dagger}a):$，继而可将上式写为[9]

$$\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}|z\rangle\langle z|=\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}:\exp[-(z^*-a^{\dagger})(z-a)]:$$
$$=\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\exp(-|z-a|^2)=1, \tag{2.61}$$

这里

$$|z\rangle=\exp\left[-\frac{1}{4}(q^2+p^2)+\frac{1}{\sqrt{2}}(q+\mathrm{i}p)a^{\dagger}\right]|0\rangle \tag{2.62}$$

或记为

$$|z\rangle=\exp\left(-\frac{|z|^2}{2}+za^{\dagger}\right)|0\rangle,\ z=\frac{1}{\sqrt{2}}(q+\mathrm{i}p) \tag{2.63}$$

即为相干态[10—12]，它在 Fock 空间还可以写为

$$|z\rangle=D(z)|0\rangle,\ D(z)=\exp(za^{\dagger}-z^*a) \tag{2.64}$$

$D(z)$是平移算符. 它是谐振子湮灭算符的本征态，$a|z\rangle=z|z\rangle$，与坐标本征态不同，它是不正交的，即

$$\langle z'|z\rangle=\exp\left[-\frac{1}{2}(|z'|^2+|z|^2)+z'^*z\right] \tag{2.65}$$

与此相关的另一重要性质是相干态的超完备性，

$$\int \frac{d^2z}{\pi} |z\rangle\langle z| = 1 \tag{2.66}$$

另外，相干态是最接近于经典的态，而且是使坐标-动量不确定关系取极小值的态. 下面证明之.

$$\langle z|Q|z\rangle = \langle z|\frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}|z\rangle = \frac{z+z^*}{\sqrt{2}} \tag{2.67}$$

$$\langle z|P|z\rangle = \langle z|\frac{a-a^\dagger}{i\sqrt{2}}|z\rangle = \frac{z-z^*}{i\sqrt{2}} \tag{2.68}$$

$$\langle z|Q^2|z\rangle = \frac{1}{2}(z^2+z^{*2}+2|z|^2+1) \tag{2.69}$$

$$\langle z|P^2|z\rangle = \frac{1}{2}(z^2+z^{*2}-2|z|^2-1) \tag{2.70}$$

由此导出

$$\langle z|(\Delta Q)^2|z\rangle = \langle z|Q^2|z\rangle - \langle z|Q|z\rangle^2 = \frac{1}{4} \tag{2.71}$$

$$\langle z|(\Delta P)^2|z\rangle = \langle z|P^2|z\rangle - \langle z|P|z\rangle^2 = \frac{1}{4} \tag{2.72}$$

$$\Delta Q\Delta P \equiv \sqrt{\langle z|(\Delta Q)^2|z\rangle\langle z|(\Delta P)^2|z\rangle} = \frac{1}{4} \tag{2.73}$$

式(2.61)说明了利用 IWOP 技术可以先构造一个积分为单位 1 的算符，若能把此算符从结构上分解为一对相互共轭的态矢，那么这个态矢量就有希望构建新的量子力学表象. 因为一种态矢能否构成表象的重要判据首先就是看它是否满足量子力学完备性关系.

以上这些关系的得出，亦反映了 IWOP 技术在实际应用中的

重要性和简洁性. Bohr 曾说过:“数学符号的广泛应用是量子力学方法的特点;这种应用使我们很难撇开数学细节而对这些方法的优美性及逻辑无矛盾性提供一个真实的印象.”也就是说,IWOP 技术的发明和具体运用展现了量子力学 Dirac 符号的深层次的优美性及逻辑完备性.

## 2.6 Wigner 算符的正规乘积形式

根据式(2.53)和式(2.58)可以“拼凑”算符

$$\Delta(q,\ p) = \frac{1}{\pi} : \mathrm{e}^{-(p-P)^2-(q-Q)^2} := \frac{1}{\pi} : \mathrm{e}^{-2(a^\dagger-\alpha^*)(a-\alpha)} : \tag{2.74}$$

这里 $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(q+\mathrm{i}p)$;立即可以得出其边缘分布为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\Delta(q,\ p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} : \mathrm{e}^{-(q-Q)^2} := |\ q\rangle\langle q\ | \tag{2.75}$$

和

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\Delta(q,\ p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} : \mathrm{e}^{-(p-P)^2} := |\ p\rangle\langle p\ |, \tag{2.76}$$

所以 $\mathrm{Tr}[\rho\Delta(q,\ p)]$就称为 Wigner 函数[13],Wigner 函数在量子相空间理论中之所以重要,就是因为它的边缘分布分别给出在坐标空间和动量空间观察到粒子的几率,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\langle\psi\ |\ \Delta(q,\ p)\ |\ \psi\rangle = \langle\psi\ |\ q\rangle\langle q\ |\ \psi\rangle = |\ \psi(q)\ |^2 \tag{2.77}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\langle\psi\ |\ \Delta(q,\ p)\ |\ \psi\rangle = \langle\psi\ |\ p\rangle\langle p\ |\ \psi\rangle = |\ \psi(p)\ |^2 \tag{2.78}$$

但要注意不能把 $W(q,\ p)$看作是坐标与动量的分布函数,只是其

单侧积分才给出坐标与动量的分布函数，而且在很多情况下，Wigner 函数本身还可以取负值因而它不具有几率密度的意义.

由式(2.74)可以看出其形式为高斯形式，在整个相空间对其积分，发现其满足相空间技术要求的归一完备性

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\mathrm{d}p\Delta(q,\ p) = 1 \tag{2.79}$$

所以任意算符可以用它展开

$$H(Q,\ P) = \iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\mathrm{d}p\Delta(q,\ p)h(q,\ p), \tag{2.80}$$

它恰好是 Weyl 对应规则，$h(p,\ q)$是算符 $H(P,\ Q)$对应的经典相空间中的函数，积分核 $\Delta(q,\ p)$称为 Wigner 算符. 在量子力学方面，因为坐标算符 $Q$ 与动量算符 $P$ 不对易，故而经典函数 $h(q,\ p)$过渡到量子力学所对应的算符 $H(Q,\ P)$不唯一，Weyl 给出的一种对应规则与式(2.80)密切相关(这些内容将在第 4 章给出详细介绍).

## 2.7 波函数和相应的 Wigner 函数的关系[14]

诚如我们已知的，量子力学中波函数 $\psi(q)$的模平方$|\psi(q)|^2$代表实验观测到的粒子在 $q$ 处的几率. 粒子的存在可由在 $q$ 附近的探测器测量，但是 $\psi(q)$本身怎样测量呢？由于 $\psi(q)$不是一个物理量，不能设计制作一个如同伏安表那样的测 $\psi$ 的仪器. 那么，由 Wigner 函数能否知道 $\psi(q)$呢？这是本节要讨论的内容.

对算符 $\Delta\left(\frac{q+q'}{2},\ p\right)$，构造下面的积分形式：

$$K \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\Delta\left(\frac{q+q'}{2},\ p\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(q-q')} \tag{2.81}$$

利用

$$\Delta(q,\ p) = \frac{1}{\pi} : \mathrm{e}^{-(q-Q)^2-(p-P)^2} : \tag{2.82}$$

和 IWOP 积分技术可得，

$$\begin{aligned} K &\equiv \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p : \exp\left[-\left(\frac{q+q'}{2}-Q\right)^2-(p-P)^2+\mathrm{i}p(q-q')\right]: \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} : \exp\left[-Q^2-\frac{q^2+q'^2}{2}+(q+q')Q+\mathrm{i}P(q-q')\right]: \end{aligned} \tag{2.83}$$

其中
$$: \mathrm{e}^{-Q^2} := \mathrm{e}^{-\frac{a^{\dagger 2}}{2}} \mid 0\rangle\langle 0 \mid \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}} \tag{2.84}$$

由坐标态矢的 Fock 表象形式以及 $:\mathrm{e}^{-a^\dagger a}: = |\, 0\rangle\langle 0\,|$ 可得

$$K = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{q'^2}{2}+\sqrt{2}q'a^\dagger-\frac{a^{\dagger 2}}{2}} \mid 0\rangle\langle 0 \mid \mathrm{e}^{-\frac{q^2}{2}+\sqrt{2}qa-\frac{a^2}{2}} = |\, q'\rangle\langle q\,| \tag{2.85}$$

那么

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}pW\left(\frac{q+q'}{2},\ p\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(q-q')} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\langle\frac{q+q'}{2}+\frac{\nu}{2}\right|\rho\left|\ \frac{q+q'}{2}-\frac{\nu}{2}\right\rangle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(q-q')}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\nu}\,\mathrm{d}\nu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left\langle\frac{q+q'}{2}+\frac{\nu}{2}\right|\rho\left|\ \frac{q+q'}{2}-\frac{\nu}{2}\right\rangle\delta(q-q'-\nu)\mathrm{d}\nu \\ &= \langle q \mid \rho \mid q'\rangle = \mathrm{Tr}(\rho K) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(q-q')}\,\mathrm{Tr}\left[\rho\Delta\left(\frac{q+q'}{2},\ p\right)\right] \end{aligned} \tag{2.86}$$

所以，可以看出，利用式(2.86)由 $W(q,\ p)$ 就可以求出密度算符的矩阵元 $\langle q|\rho|q'\rangle$.

对于单模纯态 $|\psi\rangle$，有

$$\ln\langle\psi \mid K \mid \psi\rangle = \ln\langle\psi \mid q'\rangle\langle q \mid \psi\rangle = \ln \psi^*(q') + \ln \psi(q) \tag{2.87}$$

所以 Hessian 矩阵元为

$$\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial q'}\ln\langle\psi \mid K \mid \psi\rangle = \frac{\partial}{\partial q'}\left[\frac{1}{\psi(q)}\frac{\partial}{\partial q}\psi(q)\right] = 0 \tag{2.88}$$

这是对应于一个纯态 Wigner 函数的波函数存在的条件. 为了探讨它们更明显的关系式,考虑如下积分:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\Delta\left(\frac{q_1+q_2}{2},\ p\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(q_1+q_2)} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p : \exp\left[-\left(\frac{q_1+q_2}{2}-Q\right)^2-(p-P_1)^2+\mathrm{i}p(q_1+q_2)\right]: \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} : \exp\left[-Q^2-\frac{(q_1+q_2)^2}{2}+(q_1+q_2)(Q+\mathrm{i}P)\right]: \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{a^{\dagger 2}}{2}} \mid 0\rangle\langle 0 \mid \mathrm{e}^{-\frac{(q_1+q_2)^2}{2}+\sqrt{2}(q_1+q_2)a-\frac{a^2}{2}} \\
&= \mid q=0\rangle\langle q_1+q_2 \mid
\end{aligned} \tag{2.89}$$

上式中取 $q_2 = 0$,就导致

$$\psi(q_1) = \frac{1}{\psi^*(0)}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\langle\psi \mid \Delta\left(\frac{q_1}{2},\ p\right) \mid \psi\rangle\mathrm{e}^{\mathrm{i}pq_1} \tag{2.90}$$

通过这个式子可以从给定的 Wigner 函数部分地知道波函数. 这是 Wigner 函数理论的又一重要应用,它的潜在价值有待于物理实验工作者进一步挖掘.

## 2.8 用 IWOP 技术和相干态超完备性导出若干重要算符公式

量子力学处理的力学量是算符,它们之间满足一定的对易关

系，把相干态超完备性和 IWOP 积分技术相结合，就可以很方便地推导出很多在量子光学中有用的算符公式.

把算符排成正规乘积形式是十分重要的，这是因为正规乘积算符的相干态期望值可立即知道. 例如，要求 $a^n a^{\dagger m}$ 的正规乘积形式，利用式(2.61)和 IWOP 技术把下式积分就可以得到

$$\begin{aligned} a^n a^{\dagger m} &= \int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} a^n \mid z\rangle\langle z \mid a^{\dagger m} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} z^n z^{*m} \,:\, \exp(-\mid z\mid^2 + z a^\dagger + z^* a - a^\dagger a) \,: \\ &= (-\mathrm{i})^{m+n} \mathrm{H}_{m,n}(\mathrm{i}a^\dagger, \mathrm{i}a) \,: \end{aligned} \tag{2.91}$$

其中 $\mathrm{H}_{m,n}$是双变量厄米多项式，

$$\mathrm{H}_{m,n}(\xi, \xi^*) = \sum_{l=0}^{\min(m,n)} \frac{(-1)^l m!n!}{l!(m-l)!(n-l)!} \xi^{m-l} \xi^{*n-l} \tag{2.92}$$

其中用到了积分公式

$$\begin{aligned} &\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} z^n z^{*m} \exp(-\mid z\mid^2 + z\xi - \eta z^*) \\ &= (-1)^n \mathrm{e}^{-\xi\eta} \mathrm{H}_{m,n}(\xi, \eta) \end{aligned} \tag{2.93}$$

而且更进一步可以得到

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^\lambda \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(1-\mathrm{e}^\lambda)^l}{l!} a^l a^{\dagger l} &= \mathrm{e}^\lambda \int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} \,:\, \exp(-\mathrm{e}^\lambda \mid z\mid^2 + z a^\dagger + z^* a - a^\dagger a) \,: \\ &= \,:\, \exp[(\mathrm{e}^{-\lambda} - 1) a^\dagger a] \,: \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda a^\dagger a} \end{aligned} \tag{2.94}$$

这里为了积分收敛，要求 $\mathrm{Re}\,\mathrm{e}^\lambda > 0$.

还可以求 $\mathrm{e}^{\lambda a^2} \mathrm{e}^{\sigma a^{\dagger 2}}$ 的正规排列形式[15]，

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\lambda a^2} \mathrm{e}^{\sigma a^{\dagger 2}} &= \int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} \mathrm{e}^{\lambda z^2} \mid z\rangle\langle z \mid \mathrm{e}^{\sigma z^{*2}} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} \,:\, \exp(-\mid z\mid^2 + z a^\dagger + z^* a + \lambda z^2 + \sigma z^{*2} - a^\dagger a) \,: \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-4\lambda\sigma}} \exp\left[\frac{\sigma a^{\dagger 2}}{1-4\lambda\sigma}\right] \exp[-a^{\dagger} a \ln(1-4\lambda\sigma)] \times \exp\left[\frac{\lambda a^{2}}{1-4\lambda\sigma}\right] \tag{2.95}$$

再求 $a^{n} e^{\lambda a^{\dagger} a} a^{\dagger n}$ 的正规乘积，用相干态表象的超完备性和 IWOP 积分技术，得

$$\begin{aligned} a^{n} e^{\lambda a^{\dagger} a} a^{\dagger n} &= a^{n} \int \frac{d^{2} z}{\pi} \exp\left(-\frac{|z|^{2}}{2}\right) \exp(\lambda a^{\dagger} a) \times \\ &\quad \exp(z a^{\dagger}) \exp(-\lambda a^{\dagger} a) \mid 0\rangle\langle z \mid a^{\dagger n} \\ &= \int \frac{d^{2} z}{\pi} a^{n} \exp\left(-\frac{|z|^{2}}{2}\right) \exp(z a^{\dagger} e^{\lambda}) \mid 0\rangle\langle z \mid a^{\dagger n} \\ &= \int \frac{d^{2} z}{\pi} : \exp(-|z|^{2} + z a^{\dagger} e^{\lambda} + z^{*} a - a^{\dagger} a)(z e^{\lambda})^{n} z^{* n} : \end{aligned} \tag{2.96}$$

再利用积分公式(2.93)可得

$$a^{n} e^{\lambda a^{\dagger} a} a^{\dagger n} = :(-1)^{n} \exp[(e^{\lambda}-1) a^{\dagger} a] H_{n,n}(e^{\lambda} a^{\dagger}, -a): \tag{2.97}$$

可见用 IWOP 积分技术，可使求算符正规排序的问题大大简化.

IWOP 积分技术的提出，使 17 世纪发明的牛顿-莱布尼茨积分可以对量子力学时代才出现的 ket - bra 算符实行积分，致力于研究微积分的数学家们难道无需了解么?

## 参考文献


[1] Fock V. Zeits fur Phys, 1928, 49: 399.

[2] Fan Hongyi, Zaidi H R, Klauder J R. New approach for calculating the normally ordered form of squeeze operators [J]. Phys. Rev. D, 1987, 35: 1831 - 1834.

[3] Fan Hongyi, Zaidi H R. Squeezing and frequency jump of a harmonic

oscillator [J]. Phys. Rev. A, 1988,39:2985.

[ 4 ] Fan Hongyi, Vanderlinde J. Mapping of classical canonical transformations to quantum unitary operators [J]. Phys. Rev. A, 1989,39:2987 - 2993;
Simple approach to the wave functions of one- and two-mode squeezed states [J]. Phys. Rev. A, 1989,39:1552 - 1555;
Squeezed-state wave functions and their relation to classical phase-space maps [J]. Phys. Rev. A, 1989,40:4785.

[ 5 ] Fan Hongyi, Fan Yue. Representations of two-mode squeezing transformations [J]. Phys. Rev. A, 1996,54:958 - 960.

[ 6 ] Fan Hongyi, Squeezed states: Operators for two types of one- and two-mode squeezing transformations [J]. Phys. Rev. A, 1990,41: 1526 - 1532.

[ 7 ] Wck G. The Evaluation of the Collision Matrix [J]. Phys. Rev., 1950, 80:268 - 272.

[ 8 ] Bogolyubov N N. Lectures on Quantum Statistics [M]. New York: Gordon and Breach,1987, Vol. 1.

[ 9 ] 范洪义. 量子力学表象与变换论[M]. 上海:上海科学技术出版社,1997.

[10] Klauder J R, Skagerstam B S. Coherent States [M]. Singapore: World Scientific Publishing Co., 1985.

[11] Glauber R J. The Quantum Theory of Optical Coherence [J]. Phys. Rev., 1963,130:2529 - 2539;
Coherent and Incoherent States of the Radiation Field [J]. Phys. Rev., 1963,131:2766 - 2788.

[12] Perelemov A M. Generalized Coherent States and Their Applications [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1986.

[13] O'Connell R F, Wigner E P. Quantum-mechanical distribution functions: Conditions for uniqueness [J]. Phys. Lett. A, 1981,83: 145 - 148.

[14] Xu XingLei, Li HongQi, Fan Hongyi. Relationship Between Wave Function and Corresponding Wigner Function Studied in Entangled State Representation [J]. Commun. Theor. Phys., 2008, 49: 1159 -1162.

[15] Fan Hongyi, Ruan Tunan. Some new quantum operator formulas — new applications of the coherent state [J]. Commun. Theor. Phys., 1983,2:1289 - 1305.

# 第3章 菲涅耳算符和量子刘维定理新观

经典光学(Fourier 光学)的一个重要组成部分是 Fresnel 衍射(Fresnel 变换)及关于衍射的 Collins 公式. 范洪义等人首先用相干态表象研究了 Fresnel 衍射的量子对应,利用有序算符内的积分(IWOP)技术构建了一个量子力学 Fresnel 算符,以实现量子光学中的 Fresnel 变换,它与经典 Collins 公式相对应. 自量子的 Fresnel 变换提出以来,它被广泛地应用于讨论经典光学与量子光学理论之间的关系,及与相空间中其他变换的关系. 本章用量子光学的观点重新审视量子刘维定理,采用的是压缩相干态表象和相干纠缠态表象,研究的出发点是基于如下的考虑:Fresnel 算符是通过相干态在相空间的一个代表点 $z=\frac{q+\mathrm{i}p}{\sqrt{2}}$ 运动到另一点 $sz-rz^{*}$ 而导出的,这里 $ss^{*}-rr^{*}=1$. 根据相空间的直观分析,一个相干态对应于图形上面积为$\frac{\hbar}{2}$的小圆. 量子 Fresnel 变换表示相空间的一个小圆移动到另一个小圆. $ss^{*}-rr^{*}=1$ 保证了该变换是辛变换,这也保证了两个菲涅耳算符的乘积仍是一个菲涅耳算符,这是对量子刘维定理的新注解. 考虑到相干态是压缩相干态中的一个特殊态矢,以及压缩相干态在量子光学和量子信息等领域的广泛应用,我们还从压缩相干态在相空间的代表点(一个椭圆)的运动及用 IWOP 技术提出了广义 Fresnel 算符. 本章还给出双模广义 Fresnel 算符,Fresnel - Hadamard 互补算符,及其物理意义,这些新幺正算符的经典对应为经典光学提供了发现新变换的可能性.

## 3.1 从相干态在量子相空间中代表点的运动推导菲涅耳算符

在经典统计力学中，$N$ 个粒子所组成的体系的力学状态是由所有粒子的坐标与动量（$q_1 \cdots q_N$，$p_1 \cdots p_N$）决定的. 运动状态由哈密顿方程决定. 按照吉布斯观点，一个给定的体系可以由处在相同的宏观条件下的与给定体系全同的大量体系（在极限情况下的无穷多体系）来代替，即引入“表征”体系宏观状态的统计系综. 系综是人们想象许多性质相同的各自独立的力学体系所组成的，但在统计系综中所包含的每个体系在给定时刻各处于某一运动状态. 每个体系，对应于相空间中的一个点（$q_1 \cdots q_N$，$p_1 \cdots p_N$），相点随时间的演化由哈密顿正则方程决定，在相空间中“走出”轨迹. 所以问题就变为确定系统在任何给定时刻如何分布于各种可能的运动状态中. 系综由相空间的点聚集成的“云”来描述，表示为 $\rho(q, p, t)$，物理意义是在时刻 $t$，在一个围绕着点（$q$，$p$）的相空间小区域内找到某个点的几率，“云”的形状会随时间 $t$ 改变，而相体积不变（刘维定理）.（类似于不可压缩的流体的运动）：亦即在初始时刻 $t_0$ 时的相点（$q_0$，$p_0$），在时刻 $t$ 移动到（$q$，$p$），则它们对应的相体积相等，或是说在时间的演化过程中，相点的数目不变.

相空间中：体系在运动中相体积保持不变.

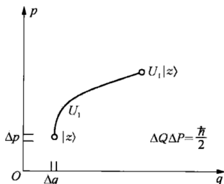


图 3-1　相干态在相空间中的运动

在统计物理的相空间的经典理论中，体系的密度分布函数遵守刘维定理：如果相体积内的每个点在相空间中沿着由运动方程决定的轨迹运动（辛运动），那么这段时间内这个相体积在相空间中是不变的，即雅可比行

列式

$$J(t,\ t_0)\equiv\frac{\partial(p,\ q)}{\partial(p^0,\ q^0)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial q}{\partial q^0} & \frac{\partial q}{\partial p^0}\\ \frac{\partial p}{\partial q^0} & \frac{\partial p}{\partial p^0}\end{vmatrix}=1 \tag{3.1}$$

下面来证明这个公式，注意这里$(p,\ q)$实际上代表$(p_1\cdots p_N,\ q_1\cdots q_N)$，所以式(3.1)中的雅可比行列式实际上是类似于矩阵的分块表示.

首先，要证明

$$\left[\frac{\partial J(t,\ t_0)}{\partial t}\right]\Big|_{t=t_0}=0 \tag{3.2}$$

定义 $\varepsilon=t-t_0$，并注意 $q^0$ 和 $p^0$ 是独立的，则有

$$\begin{aligned}J(t,\ t_0)&=J(t_0,\ t_0)+\varepsilon\left[\frac{\partial J}{\partial t}(t,\ t_0)\right]\Big|_{t=t_0}+\cdots\\&=1+\varepsilon\sum_i\left(\frac{\partial\ \dot{p}_i}{\partial p_i^0}+\frac{\partial\ \dot{q}_i}{\partial q_i^0}\right)\Big|_{t=t_0}+\cdots\end{aligned} \tag{3.3}$$

因此利用哈密顿正则方程 $\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}$，$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$ 可得

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial J(t,\ t_0)}{\partial t}\right]\Big|_{t=t_0}&=\sum_i\left(\frac{\partial\ \dot{p}_i}{\partial p_i^0}+\frac{\partial\ \dot{q}_i}{\partial q_i^0}\right)\Big|_{t=t_0}\\&=\sum_i\left(-\frac{\partial^2 H}{\partial p_i^0\partial q_i}+\frac{\partial^2 H}{\partial q_i^0\partial p_i}\right)\Big|_{t=t_0}\\&=\sum_i\left(-\frac{\partial^2 H}{\partial p_i^0\partial q_i^0}+\frac{\partial^2 H}{\partial q_i^0\partial p_i^0}\right)=0\end{aligned} \tag{3.4}$$

利用雅可比行列式的乘法规则，可以得到

$$\frac{\partial J(t,\ t_0)}{\partial t}=\frac{\partial J(t,\ t_1)}{\partial t}J(t_1,\ t_0) \tag{3.5}$$

让 $t_1$ 近似等于 $t$,那么有

$$\frac{\partial J(t, t_0)}{\partial t} = \left[\frac{\partial J(t, t_1)}{\partial t}\right]\bigg|_{t_1=t} J(t, t_0) \tag{3.6}$$

因此

$$\frac{\partial J(t, t_0)}{\partial t} = 0,\ J(t, t_0) = \text{const.} \tag{3.7}$$

由于 $J(t_0, t_0) = 1$,就得到想要的结果,$J(t, t_0) = 1$.

也可以把式(3.1)写成经典力学的代表 $2N$ 维相空间中辛变换的拉格朗日(Lagrangian)括号形式

$$[q_m^0, p_l^0]\,|_{(q,p)} \equiv \sum_{i=1}^{N} \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial q_m^0} & \frac{\partial q_i}{\partial p_l^0} \\ \frac{\partial p_i}{\partial q_m^0} & \frac{\partial p_i}{\partial p_l^0} \end{vmatrix} = \delta_{ml} \tag{3.8}$$

$$m,\ l = 1,\ 2,\ \cdots,\ n, \tag{3.9}$$

$$[q'_m, q'_l]\,|_{(q,p)} = 0,\ [p'_m, p'_l]\,|_{(q,p)} = 0 \tag{3.10}$$

在量子力学中,已知相干态 $|z\rangle$ 是最接近于经典情况的态,因为对于相干态,坐标和动量满足极小测不准原理 $\Delta q \Delta p = \frac{\hbar}{2}$,所以一个相干态在相空间占据面积为 $\frac{\hbar}{2}$ 的小圆. 相空间中这样的一个小圆代表一个量子态. 相干态的代表点为 $z = \frac{q + \mathrm{i}p}{\sqrt{2}}$,让 $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ 变换为 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$,相应的相干态就变为 $\left|\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}\right\rangle$,根据经典刘维定理(辛变换),要求实参数满足

$$AD - BC = 1 \tag{3.11}$$

引入

$$s=\frac{1}{2}[A+D-\mathrm{i}B+\mathrm{i}C],\ r=\frac{1}{2}[D-A-\mathrm{i}B-\mathrm{i}C] \tag{3.12}$$

那么条件 $AD-BC=1$ 就变为复参数 $s$，$r$ 满足的 $|s|^2-|r|^2=1$. 所以相干态 $\left|\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q\\ p\end{pmatrix}\right\rangle$ 也可以写为

$$\begin{aligned}\left|\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q\\ p\end{pmatrix}\right\rangle &= \left|\begin{pmatrix}s & -r\\ -r^* & s^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ z^*\end{pmatrix}\right\rangle \equiv |sz-rz^*\rangle \\ &= \exp\left[-\frac{|sz-rz^*|^2}{2}+(sz-rz^*)a^\dagger\right]|0\rangle\end{aligned} \tag{3.13}$$

构造如下 ket - bra 积分[1,2]

$$U_1=\sqrt{s}\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}|sz-rz^*\rangle\langle z| \tag{3.14}$$

(我们将在本节结束时解释它引起相点 $z$ 到另一点 $sz-rz^*$ 的运动.)用 IWOP 技术积分式(3.14)得到

$$\begin{aligned}U_1(s,r) &= \sqrt{s}\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}:\exp\Big[-|s|^2|z|^2+sza^\dagger+z^*(a-ra^\dagger)+ \\ &\qquad \frac{r^*s}{2}z^2+\frac{rs^*}{2}z^{*2}-a^\dagger a\Big]: \\ &= \frac{1}{\sqrt{s^*}}\exp\left[-\frac{r}{2s^*}a^{\dagger 2}\right]:\exp\left[\left(\frac{1}{s^*}-1\right)a^\dagger a\right]:\exp\left[\frac{r^*}{2s^*}a^2\right]\end{aligned} \tag{3.15}$$

这就是菲涅耳变换算符. 在菲涅耳的时代，尚无量子力学，那么为什么称它为菲涅耳算符呢？利用坐标本征态和相干态的内积

$$\langle q|z\rangle=\pi^{-\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{q^2}{2}+\sqrt{2}qz-\frac{z^2}{2}-\frac{|z|^2}{2}\right) \tag{3.16}$$

以及相干态的完备性,可计算 $U_1(s, r)$ 在坐标本征态中的矩阵元为

$$
\begin{aligned}
&\langle q_2 \mid U_1(s, r) \mid q_1 \rangle \\
&= \int \frac{d^2 z}{\pi} \langle q_2 \mid z \rangle \langle z \mid U_1(s, r) \int \frac{d^2 z'}{\pi} \mid z \rangle \langle z \mid q_1 \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{s^*}} \int \frac{d^2 z}{\pi} \int \frac{d^2 z'}{\pi} \exp\left( -\frac{q_1^2 + q_2^2}{2} + \sqrt{2} q_2 z + \sqrt{2} q_1 z' - |z|^2 - \right. \\
&\quad \left. |z'|^2 - \frac{r}{2s^*} z^{*2} + \frac{r^*}{2s^*} z'^2 + \frac{1}{s^*} z^* z' - \frac{z^2}{2} - \frac{z'^{*2}}{2} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{s^* - s + r^* - r}} \exp\left\{ \frac{1}{s^* - s + r^* - r} \times \right. \\
&\quad \left. \left[ 2q_1 q_2 + (r^* - s) q_1^2 - \frac{q_2^2}{s^* - r} \right] - \frac{r q_2^2}{s^* - r} - \frac{q_1^2 + q_2^2}{2} \right\}
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

从式(3.12)可知

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}(s - r + s^* - r^*), B = \frac{\mathrm{i}}{2}(s + r - s^* - r^*), \\
C &= -\frac{\mathrm{i}}{2}(s - r - s^* + r^*), D = \frac{1}{2}(s + r + s^* + r^*),
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

保证 $AD - BC = 1$,于是式(3.17)变为

$$
\langle q_2 \mid U_1(s, r) \mid q_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi \mathrm{i} B}} \exp\left[ \frac{\mathrm{i}}{2B} (A q_1^2 - 2 q_1 q_2 + D q_2^2) \right]
\tag{3.19}
$$

这恰好是广义菲涅耳变换的积分核. 所以 $\langle q_2 | U_1(s, r) | q_1 \rangle$ 是经典光学中 Fresnel 变换的量子对应,故而称 $U_1(s, r)$ 为菲涅耳算符. 相干态代表点在相空间中的运动恰好对应经典光学中的 Frensel 变换,这真是很奇妙的事!

式(3.19)右边是如下的菲涅耳积分所描述的光学衍射变换的

积分核

$$g(q_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\mathrm{i}B}}\int \mathrm{d}q_1 f(q_1)\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2B}(Aq_1^2-2q_1q_2+Dq_2^2)\right] \tag{3.20}$$

式中 $f(q_1)$为输入光场,$g(q_2)$为输出光场. 这也称为 Collins 衍射积分公式.

现在就可以解释 $U_1(s, r)$引起的从相点 $z$ 到另一点 $sz-rz^*$ 的运动. 事实上,由式(3.15)可得

$$U_1^\dagger aU_1=sa-ra^\dagger,\ U_1^\dagger a^\dagger U_1=s^*a^\dagger-r^*a, \tag{3.21}$$

上式两边取相干态平均值,即得此解释的合理性,形象地用图 3-1 表示. 再根据 $Q=\frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}$ 和 $P=\frac{a-a^\dagger}{\mathrm{i}\sqrt{2}}$ 就有

$$U_1^\dagger QU_1=U_1^\dagger\left(\frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}\right)U_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(sa-ra^\dagger+s^*a^\dagger-r^*a) \tag{3.22}$$

$$U_1^\dagger PU_1=U_1^\dagger\left(\frac{a-a^\dagger}{\mathrm{i}\sqrt{2}}\right)U_1=\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{2}}(sa-ra^\dagger-s^*a^\dagger+r^*a) \tag{3.23}$$

所以

$$\langle z\mid U_1^\dagger QU_1\mid z\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}[(s-r^*)z-(r-s^*)z^*] \tag{3.24}$$

$$\langle z\mid U_1^\dagger PU_1\mid z\rangle=\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{2}}[(s+r^*)z-(r+s^*)z^*] \tag{3.25}$$

$$\langle z\mid U_1^\dagger Q^2U_1\mid z\rangle=\frac{1}{2}[(s-r^*)z-(r-s^*)z^*]^2+\frac{1}{2} \tag{3.26}$$

$$\langle z \mid U_1^\dagger P^2 U_1 \mid z\rangle = -\frac{1}{2}[(s+r^*)z-(r+s^*)z^*]^2+\frac{1}{2} \tag{3.27}$$

由此可见，对应于态 $U_1|z\rangle$ 的测不准关系为

$$\langle(\Delta Q)^2\rangle = \langle Q^2\rangle - \langle Q\rangle^2 = \frac{1}{2}, \langle(\Delta P)^2\rangle = \langle P^2\rangle - \langle P\rangle^2 = \frac{1}{2} \tag{3.28}$$

即

$$\langle(\Delta Q)^2\rangle\langle(\Delta P)^2\rangle = \frac{1}{4} \tag{3.29}$$

## 3.2 量子刘维定理新观

本节证明两个菲涅耳算符的乘积仍是一个菲涅耳算符，即

$$U_1(s, r)U_1'(s', r') = U_1''(s'', r'') \tag{3.30}$$

它对应于经典光学中的两次菲涅耳变换仍是一个菲涅耳变换；由于相空间代表点的辛运动对应一个菲涅耳算符，辛运动保持相体积不变，所以(3.30)也可以被认为是经典刘维定理在量子光学中的映射，被称之为量子刘维定理(这是从新的视角理解). 根据式(3.14)即要证明 $U_1(s, r)$ 具有以下的乘法规则(注意 $s's'^*-r'r'^*=1$)：

$$\sqrt{ss'}\int\frac{d^2z d^2z'}{\pi^2}\left|\begin{pmatrix} s & -r \\ -r^* & s^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ z^*\end{pmatrix}\right\rangle\left\langle z\left|\begin{pmatrix} s' & -r' \\ -r'^* & s'^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z' \\ z'^*\end{pmatrix}\right\rangle\langle z'\right|$$

$$= \sqrt{s''}\int\frac{d^2z''}{\pi}\left|\begin{pmatrix} s'' & -r'' \\ -r''^* & s''^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z'' \\ z''^*\end{pmatrix}\right\rangle\langle z''| \tag{3.31}$$

其中经典变换矩阵满足乘法规则

$$\begin{pmatrix} s'' & -r'' \\ -r''^* & s''^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & -r \\ -r^* & s^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s' & -r' \\ -r'^* & s'^* \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

即 $s'' = ss' + rr'^*$，$r'' = sr' + rs'^*$，因此也就自动保证了

$$s''s''^* - r''r''^* = 1 \tag{3.33}$$

如果能证明式(3.31)成立，就表示矩阵的乘法规则式(3.32)能映射为以相干态 ket - bra 投影算符式(3.31)表示的非涅耳算符的乘法规则(用群表示的语言来说，就是这一相干态投影算符实现了辛群的乘法). 这里利用前面章节给出的算符公式(2.95)

$$e^{\lambda a^2} e^{\sigma a^{\dagger 2}} = \frac{1}{\sqrt{1-4\lambda\sigma}} \exp\left[\frac{\sigma a^{\dagger 2}}{1-4\lambda\sigma}\right] \exp[-a^\dagger a \ln(1-4\lambda\sigma)] \exp\left[\frac{\lambda a^2}{1-4\lambda\sigma}\right] \tag{3.34}$$

来进行计算，

$$\begin{aligned} & U_1(s, r) U_1(s', r') \\ & = \frac{1}{\sqrt{s^* s'^*}} \exp\left[-\frac{r}{2s^*} a^{\dagger 2}\right] \exp[a^\dagger a \ln(s^*)^{-1}] \exp\left[\frac{r^*}{2s^*} a^2\right] \times \\ & \quad \exp\left[-\frac{r'}{2s'^*} a^{\dagger 2}\right] \exp[a^\dagger a \ln(s'^*)^{-1}] \exp\left[\frac{r'^*}{2s'^*} a^2\right] \\ & = \frac{1}{\sqrt{s^* s'^* + r^* r'}} \exp\left[-\frac{rs'^* + r's}{2(s^* s'^* + r^* r')} a^{\dagger 2}\right] \exp[a^\dagger a \times \\ & \quad \ln(s^* s'^* + r^* r')^{-1}] \exp\left[-\frac{r'^*(s^* s'^* + r^* r') + r^*}{2s'^*(s^* s'^* + r^* r')} a^2\right] \end{aligned} \tag{3.35}$$

由式(3.32)可见

$$\frac{r'^*(s^* s'^* + r^* r') + r^*}{s'^*} = r^* s' + r'^* s^* = r''^* \tag{3.36}$$

故有

$$
\begin{aligned}
&U_1(s, r)U_1'(s', r') \\
&= \frac{1}{\sqrt{s''^*}}\exp\left[-\frac{r''}{2s''^*}a^{\dagger 2}\right]:\exp\left[\left(\frac{1}{s''^*}-1\right)a^\dagger a\right]:\exp\left[\frac{r''^*}{2s''^*}a^2\right]
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

于是乘法规则得证．它对应于这样的事实：即经典光学中接连两次 Fresnel 衍射（变换）的结果可等价于一次 Fresnel 变换．

## 3.3 广义菲涅耳算符

### 3.3.1 压缩相干态表象[3]

本节介绍一种新的压缩相干态$|z\rangle_g$，它的平移参数与其压缩参数相关，所以它有别于一般的压缩态．

给出这一单模压缩相干态（未归一）在 Fock 空间的表达形式

$$
\| z\rangle_g = \exp\left[-\frac{1}{2}|z|^2 + (fz + gz^*)a^\dagger - fga^{\dagger 2}\right]|0\rangle
\tag{3.38}
$$

其中复参数 $f$ 与 $g$ 满足关系 $|f|^2+|g|^2=1$．借助于有序算符内的积分技术，以及 $|0\rangle\langle 0| =: e^{-a^\dagger a}:$ 很容易证明其满足完备性关系

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{d^2 z}{\pi}\| z\rangle_{g\,g}\langle z\| \\
&= \int \frac{d^2 z}{\pi}:\exp[-|z|^2 + z(fa^\dagger + g^* a) + \\
&\quad z^*(ga^\dagger + f^* a) - fga^{\dagger 2} - f^* g^* a^2 - a^\dagger a]: \\
&=: e^{(|f|^2+|g|^2-1)a^\dagger a}: = 1
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

注意到，如果没有 IWOP 技术，要证明式（3.39）是很困难的．利用

$\langle z' |$ 和 $\| z\rangle_g$ 的内积

$$\langle z' \| z\rangle_g = \exp\left[-\frac{|z'|^2+|z|^2}{2}+(fz+gz^*)z'^*-fgz'^{*2}\right] \tag{3.40}$$

以及 $|z'\rangle$ 的完备性关系可以得到 $\| z\rangle_g$ 的归一化系数，计算如下：

$$\begin{aligned}
{}_g\langle z \| z\rangle_g &= \int \frac{d^2z'}{\pi}\, {}_g\langle z \| z'\rangle\langle z' \| z\rangle_g \\
&= \int \frac{d^2z'}{\pi}\exp\left[-|z'|^2-|z|^2+(fz+gz^*)z'^*-\right. \\
&\quad \left. fgz'^{*2}+(f^*z^*+g^*z)z'-f^*g^*z'^2\right] \\
&= \frac{e^{-|z|^2}}{\sqrt{1-4|fg|^2}} \\
&\quad \exp\left[\frac{|fz+gz^*|^2-fg(f^*z^*+g^*z)^2-f^*g^*(fz+gz^*)^2}{1-4|fg|^2}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-4|fg|^2}}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

所以归一化的态 $|z\rangle_g$ 是

$$|z\rangle_g = (1-4|fg|^2)^{1/4}\| z\rangle_g \tag{3.42}$$

注意这里 $2|fg| \leqslant |f|^2+|g|^2=1$.

由于

$$a|z\rangle_g = [(fz+gz^*)-2fga^\dagger]|z\rangle_g \tag{3.43}$$

所以 $|z\rangle_g$ 满足的本征方程是

$$(a+2fga^\dagger)|z\rangle_g = (fz+gz^*)|z\rangle_g \tag{3.44}$$

如果定义

$$b \equiv \frac{a + 2fga^{\dagger}}{\sqrt{1 - 4 \mid fg \mid^2}} = a\cosh\sigma + a^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sinh\sigma \equiv \mu a + \nu a^{\dagger} \tag{3.45}$$

和

$$b^{\dagger} = \mu a^{\dagger} + \nu^{*} a \tag{3.46}$$

其中

$$\mu = \cosh\sigma = \frac{1}{\sqrt{1 - 4 \mid fg \mid^2}},$$

$$\nu = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sinh\sigma = \frac{2fg}{\sqrt{1 - 4 \mid fg \mid^2}},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \frac{fg}{\mid fg \mid} \tag{3.47}$$

系数 $\mu$ 和 $\nu$ 满足关系 $\mid \mu \mid^2 - \mid \nu \mid^2 = 1$，则方程(3.44)等价于算符 $b$ 的本征方程

$$b \mid z\rangle_g = \frac{fz + gz^{*}}{\sqrt{1 - 4 \mid fg \mid^2}} \mid z\rangle_g \tag{3.48}$$

由于 $[b, b^{\dagger}] = 1$，可见 $|z\rangle_g$ 确是一类特殊的压缩相干态. 对应于方程(3.48)，可以在 $b$ 的 Fock 空间构建一相干态

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\mid fz + gz^{*} \mid^2}{1 - 4 \mid fg \mid^2} + \frac{fz + gz^{*}}{\sqrt{1 - 4 \mid fg \mid^2}} b^{\dagger}\right) \mid 0\rangle\rangle \equiv \mid \kappa(g)\rangle_b \tag{3.49}$$

满足的本征方程是

$$b \mid \kappa(g)\rangle_b = \kappa(g) \mid \kappa(g)\rangle_b \tag{3.50}$$

其中 $|0\rangle\rangle$ 是 $b$ 所在的 Fock 空间的“真空态”，有关系 $b \mid 0\rangle\rangle = 0$；且

$$\kappa(g) \equiv \frac{fz + gz^{*}}{\sqrt{1 - 4 \mid fg \mid^2}} = \mu(fz + gz^{*}) \tag{3.51}$$

这个新的真空态可以从原来的真空态得到

$$|0\rangle\rangle = (1-4|fg|^2)^{1/4}\mathrm{e}^{-fga^{\dagger 2}}|0\rangle \tag{3.52}$$

而且满足 $\langle\langle 0|0\rangle\rangle = 1$. 更详细的计算表明, $|\kappa(g)\rangle_b$ 和 $|z\rangle_g$ 差了一个指数因子,即

$$|\kappa(g)\rangle_b = \exp\left[fg^*\left(|f|^2-\frac{1}{2}\right)z^2+f^*g\left(|g|^2-\frac{1}{2}\right)z^{*2}\right]|z\rangle_g \tag{3.53}$$

想求算符对于 $|z\rangle_g$ 态的期望值时,就可以利用 $|\kappa(g)\rangle_b$ 来计算,这是由于 $|f|^2+|g|^2=1$, 用两种态的结果是一致的

$${}_b\langle\kappa(g)|f(a,a^\dagger)|\kappa(g)\rangle_b = {}_g\langle z|f(a,a^\dagger)|z\rangle_g \tag{3.54}$$

另一方面,从式(3.45)和式(3.46),可以看出 $b$ 和 $a$ 可通过一个幺正算符相互转化

$$b = UaU^{-1},\ b^\dagger = Ua^\dagger U^{-1} \tag{3.55}$$

所以可知

$$U^{-1}|\kappa(g)\rangle_b = \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{|fz+gz^*|^2}{1-4|fg|^2}+\frac{fz+gz^*}{\sqrt{1-4|fg|^2}}a^\dagger\right)|0\rangle \equiv |z,g\rangle \tag{3.56}$$

很明显,

$$a|z,g\rangle = \frac{fz+gz^*}{\sqrt{1-4|fg|^2}}|z,g\rangle \tag{3.57}$$

其中 $|z,g\rangle$ 是原 Fock 空间的相干态. 注意到

$$U^{-1}aU = \mu a - \nu a^\dagger \tag{3.58}$$

并由定义式(3.51),则方程(3.56)变为

$$a \mid z, g\rangle = \kappa(g) \mid z, g\rangle \tag{3.59}$$

下面计算新的压缩相干态 $|z\rangle_g$ 的压缩性质. 由式(3.54), (3.56)和(3.57),可以计算得

$$\begin{aligned}{}_g\langle z \mid a \mid z\rangle_g &= \langle z, g \mid U^{-1}aU \mid z, g\rangle \\ &= \langle z, g \mid (\mu a - \nu a^{\dagger}) \mid z, g\rangle = \mu\kappa - \nu\kappa^{*}\end{aligned} \tag{3.60}$$

场的正交相定义为

$$Q_1 = a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta} + a^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}, \quad Q_2 = \mathrm{i}a^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} - \mathrm{i}a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta} \tag{3.61}$$

$Q_1$ 在 $|z\rangle_g$ 的期望值为

$$\begin{aligned}{}_g\langle z \mid Q_1 \mid z\rangle_g &= \langle z, g \mid U^{-1}Q_1U \mid z, g\rangle \\ &= \langle z, g \mid (\mu a^{\dagger} - \nu^{*} a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} + (\mu a - \nu a^{\dagger})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta} \mid z, g\rangle \\ &= (\mu\kappa^{*} - \nu^{*}\kappa)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} + (\mu\kappa - \nu\kappa^{*})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\end{aligned} \tag{3.62}$$

从而有

$$\begin{aligned}\langle(\Delta Q_1)^2\rangle &= \langle Q_1^2\rangle - \langle Q_1\rangle^2 = 2\mid\nu\mid^2 + 1 - (\mu\nu^{*}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta} + \mu\nu\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\beta}) \\ &= \cosh(2\sigma) - \sinh(2\sigma)\cos(\theta - 2\beta)\end{aligned} \tag{3.63}$$

当 $\beta = \frac{1}{2}$ 时,$\langle(\Delta Q_1)^2\rangle$ 取最小值

$$\langle(\Delta Q_1)^2\rangle\mid_{\beta=\theta/2} = \mathrm{e}^{-2\sigma} = \frac{1 - 2\mid fg\mid}{1 + 2\mid fg\mid} < 1 \tag{3.64}$$

用同样的方法可以算得

$$\langle(\Delta Q_2)^2\rangle\mid_{\beta=\theta/2} = \mathrm{e}^{2\sigma} = \frac{1 + 2\mid fg\mid}{1 - 2\mid fg\mid} > 1 \tag{3.65}$$

最后来看特殊情况,当 $f = g = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时,式(3.38)就化为

$$|z\rangle_g \to \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}+\sqrt{2}xa^\dagger-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\right)|0\rangle \qquad (3.66)$$

这就是坐标本征态 ($z = x + \mathrm{i}y$). 而当 $f = -g = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时,由式(3.38)得到

$$|z\rangle_g \to \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}ya^\dagger+\frac{a^{\dagger 2}}{2}\right)|0\rangle \qquad (3.67)$$

即动量本征态.

### 3.3.2 广义菲涅耳算符[4]

基于上节给出的平移-压缩相关的压缩相干态表象 $|z\rangle_g$,利用 IWOP 技术本节将给出一个广义的菲涅耳算符,它在坐标表象中的矩阵元给出广义的 Collins 公式(描述光衍射的惠更斯-菲涅耳积分变换). 在压缩相干态表象 $|z\rangle_g$ 中通过 $z \to sz - rz^*$ 的映射就可以得到这一广义的菲涅耳算符.

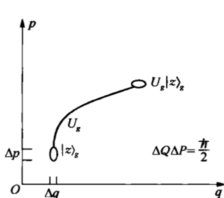



图 3-2 压缩相干态在相空间中的运动

由于量子态 $|z\rangle_g$ 是一个压缩态,它在相空间的代表域是一个椭圆,让 $z \to sz - rz^*$, 参看图3-2,相应地建立如下的 ket-bra 型积分算符

$$U_g(r, s) = \sqrt{ss^*}\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}|sz - rz^*\rangle_{g\,g}\langle z|, \qquad (3.68)$$

其中 $s$, $r$ 是复参数,满足 $|s|^2-|r|^2=1$. 根据式(3.42)及 IWOP 技术可以对式(3.68)进行积分

$$
\begin{aligned}
U_g(r,s) &= \sqrt{ss^*}\int \frac{d^2 z}{\pi} \mid sz - rz^* \rangle_{g\ g}\langle z \mid \\
&= \sqrt{ss^*}\int \frac{d^2 z}{\pi} : \exp\Big[-\frac{1}{2}\Big| sz - rz^* \Big|^2 - \frac{|z|^2}{2} + \\
&\quad (f(sz - rz^*) + g(sz - rz^*)^*)a^\dagger - \\
&\quad fga^{\dagger 2} + (f^* z^* + g^* z)a - f^* g^* a^2 - a^\dagger a\Big] : \\
&= \exp\Big[\Big(-\frac{f^2 r}{2s^*} - \frac{g^2 r^*}{2s}\Big)a^{\dagger 2}\Big] \\
&\quad : \exp\Big[\Big(\frac{|f|^2}{s^*} + \frac{|g|^2}{s} - 1\Big)a^\dagger a\Big] : \times \\
&\quad \exp\Big[\Big(\frac{f^{*2} r^*}{2s^*} + \frac{g^{*2} r}{2s}\Big)a^2\Big]
\end{aligned}
\tag{3.69}
$$

再由算符公式 $\exp(\lambda a^\dagger a) =: \exp[(e^\lambda - 1)a^\dagger a]:$ 去掉式(3.69)中正规乘积记号可得

$$
\begin{aligned}
U_g(r,s) = \exp\Big[\Big(-\frac{f^2 r}{2s^*} - \frac{g^2 r^*}{2s}\Big)a^{\dagger 2}\Big] \times \\
\exp\Big[a^\dagger a \ln\Big(\frac{|f|^2}{s^*} + \frac{|g|^2}{s}\Big)\Big]\exp\Big[\Big(\frac{f^{*2} r^*}{2s^*} + \frac{g^{*2} r}{2s}\Big)a^2\Big]
\end{aligned}
\tag{3.70}
$$

称 $U_g(r, s)$为广义的菲涅耳算符. 特别地,当 $g = 0$, $f = 1$,式(3.70) 就变为前面讲过的一般的菲涅耳算符 $U(r, s)$

$$
U_{g=0}(r,s) = \sqrt{s^*}\,U(r,s) \tag{3.71}
$$

当 $g = 1$, $f = 0$, 由式(3.70)可得到

$$
U_{g=1}(r,s) = \sqrt{s}\,U(r^*, s^*) \tag{3.72}
$$

可见 $U_g(r, s)$被称之为广义的菲涅耳算符是十分恰当的. 另一方面,利用式(3.38)和式(3.40)可以证明 $U_g(r, s)$是一个幺正算符,即

$$
U_g^\dagger(r,s) = U_g^{-1}(r,s) \tag{3.73}
$$

作为练习,读者可以自己验证一下.

### 3.3.3 广义 Collins 公式

利用$U_g(r, s)$的正规乘积形式(3.69),首先来计算$U_g(r, s)$的相干态矩阵元

$$\langle z \mid U_g(r, s) \mid z' \rangle = \exp\left[\left(-\frac{f^2 r}{2s^*} - \frac{g^2 r^*}{2s}\right) z^{*2}\right] \times \exp\left[\left(\frac{|f|^2}{s^*} + \frac{|g|^2}{s} - 1\right) z^* z'\right] \times \exp\left[\left(\frac{f^{*2} r^*}{2s^*} + \frac{g^{*2} r}{2s}\right) z'^2\right] \tag{3.74}$$

再由坐标本征态和相干态的内积

$$\langle z' \mid q_1 \rangle = \exp\left\{-\frac{q_1^2}{2} + \sqrt{2} q_1 z'^* - \frac{z'^{*2}}{2} - \frac{|z'|^2}{2}\right\} \tag{3.75}$$

以及相干态表象的完备性关系,很容易可以计算$U_g(r, s)$的坐标本征态矩阵元

$$\begin{aligned}
&\langle q_2 \mid U_g(r, s) \mid q_1 \rangle \\
&= \int \frac{d^2 z d^2 z'}{\pi} \langle q_2 \mid z \rangle \langle z \mid U_g(r, s) \mid z' \rangle \langle z' \mid q_1 \rangle \\
&= \pi^{-1/2} \int \frac{d^2 z d^2 z'}{\pi} \exp\left\{-\frac{q_1^2 + q_2^2}{2} + \sqrt{2} q_2 z + \sqrt{2} q_1 z'^* - |z|^2 - |z'|^2 + \frac{V}{2} z'^2 - \frac{Y}{2} z^{*2} + K z^* z' - \frac{z^2}{2} - \frac{z'^{*2}}{2}\right\} \\
&= \pi^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{W}} \exp\left\{\frac{2 q_1 q_2}{W} K - \frac{q_2^2}{W}[K^2 + Y(1+V)] - \frac{q_1^2}{W}[K^2 - V(1-Y)] - \frac{q_1^2 + q_2^2}{2}\right\}
\end{aligned}$$

$$= \pi^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{W}} \exp\left\{-\frac{q_1^2}{2W}[K^2 + (1-Y)(1-V)] + \frac{2q_1 q_2}{W}K - \frac{q_2^2}{2W}[K^2 + (1+V)(1+Y)]\right\} \tag{3.76}$$

其中定义了 $K$, $V$, $Y$ 和 $W$,形式如下

$$K \equiv \frac{|f|^2}{s^*} + \frac{|g|^2}{s}, \; V \equiv \frac{f^{*2} r^*}{s^*} + \frac{g^{*2} r}{s},$$
$$Y \equiv \frac{f^2 r}{s^*} + \frac{g^2 r^*}{s}, \; W \equiv (1-Y)(1+V) - K^2 \tag{3.77}$$

引进满足关系 $AD - BC = 1$ 的四个量

$$A = \frac{1}{2}[K + K^{-1}(1-V)(1-Y)],$$
$$B = \frac{\mathrm{i}}{2}[K - K^{-1}(1+V)(1-Y)]$$
$$C = -\frac{\mathrm{i}}{2}[K - K^{-1}(1-V)(1+Y)],$$
$$D = \frac{1}{2}[K + K^{-1}(1+V)(1+Y)] \tag{3.78}$$

式(3.76)就可以写作

$$\langle q_2 \mid U_g(r, s) \mid q_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi \mathrm{i} BK}} \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2B}(Aq_1^2 - 2q_1 q_2 + Dq_2^2)\right] \tag{3.79}$$

式(3.79)是广义的 Collins 衍射积分公式. 考虑 $f$, $g$ 取特殊值时,例如当 $g = 0$, $f = 1$ 时,由式(3.77)和(3.78)得到

$$A = \frac{1}{2}(s - r + s^* - r^*), \; B = \frac{\mathrm{i}}{2}(s + r - s^* - r^*),$$
$$C = -\frac{\mathrm{i}}{2}(s - r - s^* + r^*), \; D = \frac{1}{2}(s + r + s^* + r^*). \tag{3.80}$$

那么式(3.79)就变为

$$\langle q_2 \mid U_{g=0}(r,s) \mid q_1 \rangle = \frac{\sqrt{s^*}}{\sqrt{2\pi i B}} \exp\left[\frac{i}{2B}(Aq_1^2 - 2q_1q_2 + Dq_2^2)\right]$$
$$= \sqrt{s^*}\langle q_2 \mid U(r,s) \mid q_1 \rangle \tag{3.81}$$

当 $g=1$，$f=0$ 时，由式(3.77)和(3.78)得到

$$A = \frac{1}{2}(s^* - r^* + s - r),\ B = \frac{i}{2}(s^* + r^* - s - r),$$
$$C = -\frac{i}{2}(s^* - r^* - s + r),\ D = \frac{1}{2}(s^* + r^* + s + r). \tag{3.82}$$

此时式(3.79)给出

$$\langle q_2 \mid U_{g=1}(r,s) \mid q_1 \rangle = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2\pi i B}} \exp\left[\frac{i}{2B}(Aq_1^2 - 2q_1q_2 + Dq_2^2)\right]$$
$$= \sqrt{s}\langle q_2 \mid U(r^*, s^*) \mid q_1 \rangle \tag{3.83}$$

其中 $\langle q_2 \mid U(r,s) \mid q_1 \rangle$ 是一维的 Collins 公式

$$\langle q_2 \mid U(r,s) \mid q_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi i B}} \exp\left[\frac{i}{2B}(Aq_1^2 - 2q_1q_2 + Dq_2^2)\right] \tag{3.84}$$

可见式(3.79)确是广义的 Collins 衍射积分公式.

以上讨论表明，当在量子光学框架中找到新算符时，就可以考虑它的经典对应可否在经典光学中实现.

## 3.4 Fresnel - Hadamard 组合变换[5]

通过上面章节的介绍，我们知道菲涅耳变换是将量子光学与

经典光学相互连接的桥梁. 在量子计算机的理论研究中，常用 Hadamard 变换. 从 Deutsch - Jozsa 的量子几何观点来看，Hadamard 变换是一个维度为 $N=2^n$ 的量子 Fourier 变换的一个特例，Hadamard 变换是 $n$ 个 Hadamard 门平行地作用在 $n$ 个 qubits 上的一个操作. 具体的关于量子 Fourier 变换、Hadamard 变换及 Hadamard 门的知识请参阅相关文献.

这两个变换(菲涅耳变换和 Hadamard 变换)在理论研究中都很重要，一个有趣的问题自然也就产生了：可以将这两种变换统一在一个算符中吗？另一种说法，是否可以建立一个联合变换，它能同时发挥这两个变换的作用？本节将利用相干纠缠态表象以及 IWOP 技术给出答案.

### 3.4.1 相干纠缠态表象[6]

由于算符 $a_1-a_2$ 和 $Q_1+Q_2$ 是对易的，那么就可以找到它们的共同本征态 $|z,q\rangle$，称之为相干纠缠态，因为它既有相干态的特性(一组具有超完备性和部分正交性的基)，又具有纠缠态的性质. 它在 Fock 空间的表达式为($z$ 是复数，$q$ 是实数)

$$|z,q\rangle = \exp\left[-\frac{|z|^2}{4}-\frac{q^2}{2}-\frac{(a_1^\dagger+a_2^\dagger)^2}{4}+\left(q+\frac{z}{2}\right)a_1^\dagger+\left(q-\frac{z}{2}\right)a_2^\dagger\right]|00\rangle \tag{3.85}$$

事实上，由于

$$\begin{aligned} a_1|z,q\rangle &= \left[a_1, \exp\left[-\frac{|z|^2}{4}-\frac{q^2}{2}-\frac{(a_1^\dagger+a_2^\dagger)^2}{4}+\right.\right.\\ &\left.\left.\left(q+\frac{z}{2}\right)a_1^\dagger+\left(q-\frac{z}{2}\right)a_2^\dagger\right]\right]|00\rangle \\ &= \left[\frac{1}{2}(z-a_1^\dagger-a_2^\dagger)+q\right]|z,q\rangle \end{aligned} \tag{3.86}$$

$$a_2|z,q\rangle = \left[a_2, \exp\left[-\frac{|z|^2}{4}-\frac{q^2}{2}-\frac{(a_1^\dagger+a_2^\dagger)^2}{4}+\right.\right.$$

$$\left(q+\frac{z}{2}\right)a_1^\dagger+\left(q-\frac{z}{2}\right)a_2^\dagger\Big]\Big] \mid 00\rangle$$

$$=\left[-\frac{1}{2}(z+a_1^\dagger+a_2^\dagger)+q\right]\mid z,\ q\rangle \tag{3.87}$$

所以很容易得到

$$(a_1-a_2)\mid z,\ q\rangle = z\mid z,\ q\rangle$$

$$\frac{Q_1+Q_2}{2}\mid z,\ q\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}q\mid z,\ q\rangle \tag{3.88}$$

利用 IWOP 技术可以证明$|z,\ q\rangle$是完备的

$$\int\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\pi}}\int\frac{\mathrm{d}^2z}{2\pi}\mid z,\ q\rangle\langle z,\ q\mid$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\pi}}\int\frac{\mathrm{d}^2z}{2\pi}:\exp\Big[-\frac{|z|^2}{2}-q^2-\frac{(a_1^\dagger+a_2^\dagger)^2}{4}+\left(q+\frac{z}{2}\right)a_1^\dagger+$$

$$\left(q-\frac{z}{2}\right)a_2^\dagger-a_1^\dagger a_1-a_2^\dagger a_2-\frac{(a_1+a_2)^2}{4}+\left(q+\frac{z}{2}\right)a_1+$$

$$\left(q-\frac{z}{2}\right)a_2\Big]:=1 \tag{3.89}$$

读者可以自己试着证明一下$|z,\ q\rangle$的部分正交性.

### 3.4.2 Hadamard 变换

Hadamard 变换为 $n$ 个 Hadamard 门同时对 $N$ 量子比特进行作用,它的作用等同于对所有基态的计算叠加. 从 Deutsch - Jozsa 量子算法的角度来看,Hadamard 变换是 $N=2^n$ 维量子傅里叶变换的一个实例,它可以表示为[7, 8]

$$\mid j\rangle=\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k=0}^{2^n-1}\mathrm{e}^{2\pi ijk/2^n}\mid k\rangle \tag{3.90}$$

连续 Hadamard 变换的定义为[9]

$$\Upsilon \mid q\rangle = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q' \exp(2\mathrm{i}qq'/\sigma^2) \mid q'\rangle \tag{3.91}$$

$\sigma$是尺度变换系数，$\Upsilon$是 Hadamard 算符. 利用坐标本征态的完备性关系可得到

$$\Upsilon = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\mathrm{d}q' \exp(2\mathrm{i}qq'/\sigma^2) \mid q'\rangle\langle q \mid \tag{3.92}$$

### 3.4.3 Fresnel－Hadamard 互补变换

受式(3.14)和式(3.92)的启发，在相干纠缠态表象构造如下形式的 Fresnel－Hadamard 互补算符 $U$，

$$U = \frac{\sqrt{s}}{\sigma\sqrt{\pi}} \int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\mathrm{d}q' \exp(2\mathrm{i}qq'/\sigma^2) \mid sz - rz^*,\ q'\rangle\langle z,\ q \mid \tag{3.93}$$

将式(3.85)代入式(3.93)并利用 IWOP 技术及真空投影算符的正规乘积形式

$$\mid 00\rangle\langle 00 \mid = \colon \exp(-a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2) \colon \tag{3.94}$$

可以得到

$$U = \frac{\sqrt{s}}{\sigma\sqrt{\pi}} \colon \int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} A(z,\ z^*) \iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\mathrm{d}q' B(q,\ q') \mathrm{e}^C \colon \tag{3.95}$$

其中

$$A(z,\ z^*) \equiv \exp\left[-\frac{\mid sz - rz^* \mid^2 + \mid z \mid^2}{4} + \frac{sz - rz^*}{2}(a_1^\dagger - a_2^\dagger) + \frac{z^*}{2}(a_1 - a_2)\right] \tag{3.96}$$

$$B(q,\ q') \equiv \exp\left[-\frac{q'^2 + q^2}{4} + q'(a_1^\dagger + a_2^\dagger) + \right.$$

$$q(a_1 + a_2) + \frac{2iqq'}{\sigma^2}\Big] \tag{3.97}$$

$$C \equiv -\frac{(a_1^\dagger + a_2^\dagger)^2 + (a_1 + a_2)^2}{4} - a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2 \tag{3.98}$$

在正规乘积记号内,所有的 $a^\dagger$ 与 $a$ 都可以看做是 $c$ 数,对 $\mathrm{d}q\mathrm{d}q'$ 积分得到

$$\iint \mathrm{d}q\mathrm{d}q' B(q, q')$$
$$= \sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi\sigma^4}{(\sigma^4+4)}} \times$$
$$\exp\left\{\frac{-4(a_1^\dagger + a_2^\dagger)^2 + 4i(a_1 + a_2)(a_1^\dagger + a_2^\dagger)\sigma^2 + \sigma^4(a_1 + a_2)^2}{2(\sigma^4+4)}\right\} \tag{3.99}$$

接着有

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} A(z, z^*) = \frac{2}{\sqrt{|s|^2}} \exp\Big[-\frac{s(a_1^\dagger - a_2^\dagger)}{2}(ra_1^\dagger - ra_2^\dagger - a_1 + a_2) + \frac{r^*}{4s^*}(ra_1^\dagger - ra_2^\dagger - a_1 + a_2)^2 + \frac{rs}{4}(a_1^\dagger - a_2^\dagger)^2\Big] \tag{3.100}$$

将式(3.98),(3.99),(3.100)代入式(3.95),经整理最终得到

$$U = \frac{4\sqrt{\pi}\sigma}{\sqrt{s^*}\sqrt{\sigma^4+4}} :\exp\left\{-\frac{r}{2s^*}\left(\frac{a_1^\dagger - a_2^\dagger}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{\sigma^4-4}{2(\sigma^4+4)}\left(\frac{a_1^\dagger + a_2^\dagger}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{s^*} - 1\right)\left(\frac{a_1^\dagger - a_2^\dagger}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{a_1 - a_2}{\sqrt{2}}\right) + \left[\frac{4i\sigma^2}{(\sigma^4+4)} - 1\right]\left(\frac{a_1^\dagger + a_2^\dagger}{\sqrt{2}}\right) \times \left(\frac{a_1 + a_2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{r^*}{2s^*}\left(\frac{a_1 - a_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{\sigma^4-4}{2(\sigma^4+4)}\left(\frac{a_1 + a_2}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}: \tag{3.101}$$

这就是 Fresnel - Hadamard 互补算符的正规乘积形式.

### 3.4.4 Fresnel - Hadamard 互补算符的特性

注意到关系式

$$\left[\frac{a_1-a_2}{\sqrt{2}}, \frac{a_1^\dagger+a_2^\dagger}{\sqrt{2}}\right]=0,\ \left[\frac{a_1-a_2}{\sqrt{2}}, \frac{a_1^\dagger-a_2^\dagger}{\sqrt{2}}\right]=1 \text{ 和}$$

$$\left[\frac{a_1+a_2}{\sqrt{2}}, \frac{a_1^\dagger+a_2^\dagger}{\sqrt{2}}\right]=1 \tag{3.102}$$

$\frac{a_1-a_2}{\sqrt{2}}$ 可以看作是独立于$\frac{a_1+a_2}{\sqrt{2}}$ 的另一模,所以有算符恒等式

$$\begin{aligned}&\exp[f(a_1^\dagger \pm a_2^\dagger)(a_1 \pm a_2)]\\ &=:\exp\left[\frac{1}{2}(e^{2f}-1)(a_1^\dagger \pm a_2^\dagger)(a_1 \pm a_2)\right]:\end{aligned} \tag{3.103}$$

用式(3.102)和式(3.103)可以将式(3.101)写成

$$U = U_2 U_1 = U_1 U_2 \tag{3.104}$$

其中

$$\begin{aligned}U_1 = &\frac{4\sqrt{\pi}\sigma}{\sqrt{\sigma^4+4}}\exp\left[\frac{\sigma^4-4}{2(\sigma^4+4)}\left(\frac{a_1^\dagger+a_2^\dagger}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\times\\ &\exp\left\{\left(\frac{a_1^\dagger+a_2^\dagger}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{a_1+a_2}{\sqrt{2}}\right)\ln\left[\frac{4i\sigma^2}{(\sigma^4+4)}\right]\right\}\\ &\exp\left[\frac{\sigma^4-4}{2(\sigma^4+4)}\left(\frac{a_1+a_2}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\end{aligned} \tag{3.105}$$

$$\begin{aligned}U_2 = &\exp\left[-\frac{r}{2s^*}\left(\frac{a_1^\dagger-a_2^\dagger}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\exp\left\{\left[\left(\frac{a_1^\dagger-a_2^\dagger}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{a_1-a_2}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2}\right]\times\right.\\ &\left.\ln\frac{1}{s^*}\right\}\exp\left[\frac{r^*}{2s^*}\left(\frac{a_1-a_2}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\end{aligned} \tag{3.106}$$

$U_2$ 是模式 $\frac{a_1 - a_2}{\sqrt{2}}$ 的菲涅耳算符,$U_1$ 是模式$\frac{a_1 + a_2}{\sqrt{2}}$ 的 Hadamard 算符.那么接着就有

$$U \frac{a_1 - a_2}{\sqrt{2}} U^{-1} = U_2 \frac{a_1 - a_2}{\sqrt{2}} U_2^{-1} = s^* \frac{a_1 - a_2}{\sqrt{2}} + r \frac{a_1^\dagger - a_2^\dagger}{\sqrt{2}}$$

$$U \frac{a_1^\dagger - a_2^\dagger}{\sqrt{2}} U^{-1} = U_2 \frac{a_1^\dagger - a_2^\dagger}{\sqrt{2}} U_2^{-1} = r^* \frac{a_1 - a_2}{\sqrt{2}} + s \frac{a_1^\dagger - a_2^\dagger}{\sqrt{2}} \tag{3.107}$$

物理上,模 $\frac{a_1 - a_2}{\sqrt{2}}$ 和模$\frac{a_1 + a_2}{\sqrt{2}}$ 可以看作是一个光分束器的两个出射场.另一方面,从式(3.101)还可以得到

$$\begin{aligned} U \frac{a_1 + a_2}{\sqrt{2}} U^{-1} &= U_1 \frac{a_1 + a_2}{\sqrt{2}} U_1^{-1} \\ &= \frac{1}{4\mathrm{i}\sigma^2}\left[(\sigma^4 + 4)\frac{a_1 + a_2}{\sqrt{2}} - (\sigma^4 - 4)\frac{a_1^\dagger + a_2^\dagger}{\sqrt{2}}\right] \\ U \frac{a_1^\dagger + a_2^\dagger}{\sqrt{2}} U^{-1} &= U_1 \frac{a_1^\dagger + a_2^\dagger}{\sqrt{2}} U_1^{-1} \\ &= \frac{1}{4\mathrm{i}\sigma^2}\left[-(\sigma^4 + 4)\frac{a_1^\dagger + a_2^\dagger}{\sqrt{2}} + (\sigma^4 - 4)\frac{a_1 + a_2}{\sqrt{2}}\right] \end{aligned} \tag{3.108}$$

对于

$$Q_j = \frac{a_j + a_j^\dagger}{\sqrt{2}},\ P_j = \frac{a_j - a_j^\dagger}{\mathrm{i}\sqrt{2}},(j = 1,\ 2) \tag{3.109}$$

则有

$$U \frac{Q_1 + Q_2}{2} U^{-1} = \frac{\sigma^2}{4}(P_1 + P_2),$$

$$U(P_1 + P_2)U^{-1} = -\frac{4}{\sigma^2}\frac{Q_1 + Q_2}{2} \tag{3.110}$$

式(3.110)的相互变换可以通过下面两式实现

$$e^{i\frac{\pi}{2}(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2)}(Q_1+Q_2)e^{-i\frac{\pi}{2}(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2)}=P_1+P_2$$
$$e^{i\frac{\pi}{2}(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2)}(P_1+P_2)e^{-i\frac{\pi}{2}(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2)}=-(Q_1+Q_2)$$
$$(3.111)$$

而双模压缩算符为

$$S_2=\exp\left[\ln\frac{2}{\sigma^2}(a_1^\dagger a_2^\dagger-a_1a_2)\right] \qquad (3.112)$$

所以

$$U_1=S_2^{-1}\,e^{i\frac{\pi}{2}(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2)} \qquad (3.113)$$

从式(3.104)到式(3.113),可以看到$U$被分解为

$$U=U_2S_2^{-1}e^{i\frac{\pi}{2}(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2)}=S_2^{-1}e^{i\frac{\pi}{2}(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2)}U_2 \qquad (3.114)$$

同时也可以看到$U$是幺正的,$U^\dagger U=UU^\dagger=1$.

小结:以上基于相干纠缠态表象,提出了一个 Fresnel - Hadamard 互补算符,它对一个光分束器的两个输出光场$\frac{a_1+a_2}{\sqrt{2}}$和$\frac{a_1-a_2}{\sqrt{2}}$分别起到了 Hadamard 变换和 Fresnel 变换的作用(该光分束器的两个输入光场分别为$a_1$与$a_2$).如果一个光学装置可以被设计为 Fresnel - Hadamard 互补变换,则该装置可以直接被用于输出一个光分束器的两个出射场.

## 3.5 双模菲涅耳算符[10,11]

可以把3.1节的讨论推广到双模相干态$|z_1,z_2\rangle$表象情况.构造如下的 ket - bra 积分型投影算符:

$$U_2(r,s)=s\int\frac{d^2z_1d^2z_2}{\pi^2}\left|sz_1+rz_2^*,rz_1^*+sz_2\right\rangle\langle z_1,z_2|$$
$$(3.115)$$

式中 $|s|^2-|r|^2=1$. 用 IWOP 技术积分之,则得到

$$U_2(r,s)=s\int\frac{d^2z_1d^2z_2}{\pi^2}:\exp[-|s|^2(|z_1|^2+|z_2|^2)-r^*sz_1z_2-rs^*z_1^*z_2^*+(sz_1+rz_2^*)a^\dagger+(rz_1^*+sz_2)b^\dagger+z_1^*a+z_2^*b-a^\dagger a-b^\dagger b]:$$
$$=\exp\left(\frac{r}{s^*}a^\dagger b^\dagger\right)\exp[(a^\dagger a+b^\dagger b+1)\ln(s^*)^{-1}]\exp\left(-\frac{r^*}{s^*}ab\right)\tag{3.116}$$

式(3.115)和式(3.116)表明双模压缩算符 $U_2(r,s)$ 也是辛变换 $(z_1,z_2)\to(sz_1+rz_2^*,rz_1^*+sz_2)$ 在希尔伯特空间中的映射. 同样也可以证明由式(3.115)代表的 $U_2(r,s)$ 的相干态投影算符表示也是满足量子刘维定理的. 用 IWOP 积分技术计算 $U_2(r,s)U_2(r',s')$,得到

$$U_2(r,s)U_2(r',s')$$
$$=ss'\int\frac{d^2z_1d^2z_2}{\pi^2}\left|sz_1+rz_2^*,rz_1^*+sz_2\right\rangle\langle z_1,z_2|\times\int\frac{d^2z_1'd^2z_2'}{\pi^2}\left|s'z_1'+r'z_2'^*,r'z_1'^*+s'z_2'\right\rangle\langle z_1',z_2'|$$
$$=\frac{1}{s^*s'^*+r^*r'}\exp\left(\frac{rs'^*+r's}{s^*s'^*+r^*r'}b^\dagger a^\dagger\right):\exp\left[\left(\frac{1}{s^*s'^*+r^*r'}-1\right)\times(a^\dagger a+b^\dagger b)\right]\exp\left[-\frac{rs'^*+r's}{s^*s'^*+r^*r'}ba\right]\tag{3.117}$$

令

$$s''=ss'+rr'^*,\quad r''=rs'^*+r's\tag{3.118}$$

可见 $|s''|^2-|r''|^2=1$,于是

$$U_2(r,s)U_2(r',s')$$
$$=\exp\left(\frac{r''}{s''^*}a^\dagger b^\dagger\right)\exp[(a^\dagger a+b^\dagger b+1)\ln(s''^*)^{-1}]\exp\left(-\frac{r''^*}{s''^*}ab\right)$$
$$=U_2(r'',s'')\tag{3.119}$$

可见量子刘维定理对于双模情况也是成立的.

## 参考文献


[1] Fan Hongyi. Symplectic Group Representation of the Two-Mode Squeezing Operator in the Coherent State Basis [J]. Commun. Theor. Phys., 2003,40:589 - 594.

[2] Fan Hongyi, Lu Hailiang. Wave-function transformations by general SU(1,1) single-mode squeezing and analogy to Fresneltransformations in wave optics [J]. Opt. Commun., 2006,258:51 - 58.

[3] Fan Hongyi, Min Xiao. A special type of squeezed coherent state [J]. Phys. Lett. A, 1996,220:81 - 86.

[4] Xie Chuanmei, Fan Hongyi, Wan Shaolong. A generalized Collins formula derived by virtue of the displacement-squeezing related squeezed coherent state representation [J]. Chin. Phys. B, 2010, 19,064207.

[5] Xie Chuanmei, Fan Hongyi. Fresnel-Hadamard complementary transformation in quantum optics [J]. J. Mod. Opt., 2010, 57: 582 -586.

[6] Fan Hongyi, Lu Hailiang. New two-mode coherent-entangled state and its application [J]. J. Phys. A: Math. Gen., 2004,37:10993 - 11003.

[7] Nielsen M A, Chuang I L. The Quantum Computation and Quantum Information [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

[8] Preskill J. Quantum Information and Computation [M]. California: California Institute of Technology, 1998.

[9] Parker S, Bose S, Plenio M B. Entanglement quantification and purification in continuous variable systems [J]. Phys. Rev. A, 2000, 61:032305.

[10] Fan Hongyi, Lu Hailiang. 2-mode Fresnel operator and entangled Fresnel transform [J]. Phys. Lett. A, 2005,334:132 - 139.

[11] Fan Hongyi, Chen Junhua. Coherent State Projection Operator Representation of Symplectic Transformations as a Loyal Representation of Symplectic Group [J]. Commun. Theor. Phys., 2002,38:147 - 150.

# 第 4 章　Weyl 对应与 Wigner 算符的范氏形式

## 4.1　从 Weyl 变换到 Weyl 对应

Weyl 是 Hilbert 的学生，被 Dirac 称之为“不能理解”的科学家. 1929 年威斯康星报的一名记者在采访 Dirac 时问道：“人们说你和爱因斯坦是世界上仅有的两位天分很高而又能互相了解的人，我不会问你这是否真实，因为我知道你太谦虚而不肯承认. 但是我想知道——你是否曾经遇到过一个人，对于他，就是您也不能够理解?”对此问题，Dirac 的回答就是 Weyl. 本章中，我们将较明显地发展 Weyl 对应与 Wigner 算符理论，给出 Wigner 算符的 $\delta$ 函数形式，并用于建立新算符与新变换.

在量子力学方面，因为坐标算符 $Q$ 与动量算符 $P$ 不对易，故而经典函数 $h(q,\ p)$ 过渡到量子力学所对应的算符 $H(Q,\ P)$ 不唯一，人们必须给出一种对应规则作为解决这个问题的一个方案. 1932 年，Weyl 给出了一种现在称之为 Weyl 对应的编序方案

$$q^m p^n \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{l=0}^{m} \frac{m!}{l!(m-l)!} Q^{m-l} P^n Q^l \tag{4.1}$$

我们也许“不能理解”他是怎么想出这个方案的、这个方案有什么优越性? 但是通过有序算符内的积分技术(IWOP 积分技术)，可以深入地揭示 Weyl 编序的实质，并在此基础上引入 Weyl 编序算符内的积分技术.

设哈密顿量 $H(Q,\ P)$ 的某坐标表象矩阵元有如下的傅里叶变换

$$\int \mathrm{d}u \mathrm{e}^{-\mathrm{i}pu} \left\langle q+\frac{u}{2} \middle| H(Q, P) \middle| q-\frac{u}{2} \right\rangle = h(q, p) \tag{4.2}$$

其逆变换为

$$\left\langle q+\frac{u}{2} \middle| H(Q, P) \middle| q-\frac{u}{2} \right\rangle = \int \frac{\mathrm{d}p}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}pu} h(q, p) \tag{4.3}$$

或改写为

$$\langle q \mid H(Q, P) \mid q' \rangle = \int \frac{\mathrm{d}p}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p(q-q')} h\left(\frac{q+q'}{2}, p\right) \tag{4.4}$$

这被称为 Weyl 变换. 此式可以看作是由以下两式

$$\langle q \mid P \mid q' \rangle = \int \frac{\mathrm{d}p}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p(q-q')} p = -\mathrm{i} \frac{\partial}{\partial q} \delta(q-q') \tag{4.5}$$

$$\langle q \mid Q \mid q' \rangle = \frac{q+q'}{2} \delta(q-q') = \int \frac{\mathrm{d}p}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p(q-q')} \frac{q+q'}{2} \tag{4.6}$$

归纳出来的一个“猜测”，即从 $\langle q \mid H(Q, P) \mid q' \rangle$ 来定义 $h\left(\frac{q+q'}{2}, p\right)$，称之为“中点”方案. 实际上，式(4.5)，(4.6)是式(4.4)的特例，式(4.4)是式(4.5)，(4.6)的推广与总结. Weyl 变换很自然地给出了量子力学算符与经典物理量的一种对应关系. 利用求迹的性质 $\mathrm{Tr}(\mid u\rangle\langle \nu \mid) = \langle u \mid \nu \rangle$ 把 Weyl 变换式(4.2)改写为

$$h(q, p) = 2\pi \mathrm{Tr}[H(Q, P)\Delta(q, p)] \tag{4.7}$$

其中 $\Delta(q, p)$称为 Wigner 算符

$$\Delta(q, p) = \int \frac{\mathrm{d}u}{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}pu} \left| q-\frac{u}{2} \right\rangle \left\langle q+\frac{u}{2} \right| \tag{4.8}$$

另一方面，对式(4.4)左乘$\int \mathrm{d}q \mid q \rangle$，右乘$\int \mathrm{d}q' \langle q' \mid$ 并利用坐标表象完备性，则得到

$$
\begin{aligned}
H(Q,\ P) &= \int \mathrm{d}q\mathrm{d}q' \mid q\rangle\langle q' \mid \int \frac{\mathrm{d}p}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p(q-q')} h\left(\frac{q+q'}{2},\ p\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}p\mathrm{d}q\mathrm{d}u h(q,\ p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pu} \left| q+\frac{u}{2} \right\rangle\left\langle q-\frac{u}{2} \right| \\
&= \int \mathrm{d}p\mathrm{d}q h(q,\ p)\Delta(q,\ p) \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

式(4.9)和式(4.7)合称为 Weyl 对应，$h(q,\ p)$称为算符 $H(Q,\ P)$的经典对应，Wigner 算符 $\Delta(q,\ p)$是积分核. 式(4.9)的逆关系就是式(4.7).

例如，当 $H(Q,\ P) = \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{l=0}^{m} \frac{m!}{l!(m-l)!} Q^{m-l}P^nQ^l$，由式(4.7)可得

$$
\begin{aligned}
h(q,\ p) &= \int \mathrm{d}u\mathrm{e}^{\mathrm{i}pu} \left\langle q+\frac{u}{2} \right| \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{l=0}^{m} \frac{m!}{l!(m-l)!} Q^{m-l}P^nQ^l \\
&\qquad \left| q-\frac{u}{2} \right\rangle \\
&= q^m \int \mathrm{d}u\mathrm{e}^{\mathrm{i}pu} \left\langle q+\frac{u}{2} \right| p^n \left| q-\frac{u}{2} \right\rangle \\
&= q^m \int \mathrm{d}u\mathrm{e}^{\mathrm{i}pu} \int \frac{1}{2\pi}\mathrm{d}p' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'u} p'^n \\
&= q^m p^n \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

即

$$
\left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{l=0}^{m} \frac{m!}{l!(m-l)!} Q^{m-l}P^nQ^l \to q^m p^n \qquad (4.11)
$$

人们称 $\left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{l=0}^{m} \frac{m!}{l!(m-l)!} Q^{m-l}P^nQ^l$ 是一个已经 Weyl 编序好了的算符，它是 $q^m p^n$ 的 Weyl 对应. 可见 Weyl 编序与 Weyl 对应密切相关.

在前面章节，我们给出 Wigner 算符的正规乘积形式是

$$\Delta(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi} : \exp\{-2(a^\dagger - \alpha^*)(a - \alpha)\} :$$

$$= \frac{1}{\pi} : \exp\{-(q - Q)^2 - (p - P)^2\} : \tag{4.12}$$

作为应用,这里就利用 Wigner 算符的正规乘积形式和 Weyl 对应来求电流密度算符的正规乘积式[1]. 经典电流密度是

$$j(q') = \rho v = \frac{e}{m}\delta(q - q')p \tag{4.13}$$

其中 $\rho(q') = e\delta(q - q')$ 代表在点 $q$ 的电荷密度, $v = \frac{p}{m}$ 是该电荷的速度. 根据 Weyl 对应,电流密度算符就为

$$j(q') \to J \equiv \iint \mathrm{d}p\mathrm{d}q \frac{e}{m}\delta(q - q')p\Delta(q, p) \tag{4.14}$$

将式(4.12)代入式(4.14),得到

$$J = \frac{e}{m\pi}\iint \mathrm{d}p\mathrm{d}q\delta(q - q')p : \exp\{-(q - Q)^2 - (p - P)^2\} :$$

$$= \frac{e}{m\sqrt{\pi}} : \exp\{-(q' - Q)^2\}P : \tag{4.15}$$

这就是电流密度算符的正规乘积形式,将 $P = \frac{\mathrm{i}(a^\dagger - a)}{\sqrt{2}}$ 代入式(4.15)又给出

$$J = \frac{\mathrm{i}e}{m\sqrt{2\pi}}[a^\dagger : \mathrm{e}^{-(q'-Q)^2} : - : \mathrm{e}^{-(q'-Q)^2} : a]$$

$$= \frac{\mathrm{i}e}{m\sqrt{2\pi}}\left[\frac{Q - \mathrm{i}P}{\sqrt{2}} : \mathrm{e}^{-(q'-Q)^2} : - : \mathrm{e}^{-(q'-Q)^2} : \frac{Q + \mathrm{i}P}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= \frac{e}{2\sqrt{\pi}m}[P : \mathrm{e}^{-(q'-Q)^2} : + : \mathrm{e}^{-(q'-Q)^2} : P]$$

$$= \frac{e}{2m}[\delta(q' - Q)P + P\delta(q' - Q)] \tag{4.16}$$

这是明显的厄米形式,最后一步用到了

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} : \mathrm{e}^{-(q'-Q)^2} : = | q' \rangle \langle q' | = \delta(q' - Q) \tag{4.17}$$

和

$$Q : \mathrm{e}^{-(q'-Q)^2} : = : \mathrm{e}^{-(q'-Q)^2} : Q \tag{4.18}$$

## 4.2 Weyl 编序记号的引入和 Wigner 算符的 Weyl 编序形式

现在根据式(4.7)来求 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(wP+vQ)}$ 的经典 Weyl 对应. 利用算符公式[2]

$$\mathrm{e}^{A} B \mathrm{e}^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \cdots \tag{4.19}$$

以及坐标算符本征函数的特性可得

$$\begin{aligned}
& 2\pi \mathrm{Tr}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(wP+vQ)} \Delta(q, p)] \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}wv}{2}} \int \frac{\mathrm{d}u}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}pu} \left\langle q - \frac{u}{2} \right| \mathrm{e}^{\mathrm{i}wP} \mathrm{e}^{\mathrm{i}vQ} \left| q + \frac{u}{2} \right\rangle \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}wv}{2}} \int \frac{\mathrm{d}u}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}pu} \left\langle q - \frac{u}{2} \right| \left. q + \frac{u}{2} - w \right\rangle \mathrm{e}^{\mathrm{i}v\left(q + \frac{u}{2}\right)} \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}wv}{2}} \int \frac{\mathrm{d}u}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}pu} \delta(w - u) \mathrm{e}^{\mathrm{i}v\left(q + \frac{u}{2}\right)} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(wp+vq)}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

可见

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(wP+vQ)} = \int \mathrm{d}q \mathrm{d}p \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(wp+vq)} \Delta(q, p)$$

$$\sum \frac{1}{n!}(\mathrm{i}wP + \mathrm{i}\nu Q)^n = \int \mathrm{d}q\mathrm{d}p \sum \frac{1}{n!}(\mathrm{i}wp + \mathrm{i}\nu q)^n \Delta(q, p)$$

$$(wP + \nu Q)^n = \int \mathrm{d}q\mathrm{d}p(wp + \nu q)^n \Delta(q, p) \tag{4.21}$$

即

$$(wP + \nu Q)^n \to (wp + \nu q)^n \tag{4.22}$$

对比式(4.11)和式(4.22),要使它们自洽,看到

$$(wP + \nu Q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k w^k \nu^{n-k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{l!(n-k-l)!} Q^{n-k-l} P^k Q^l \tag{4.23}$$

引入 Weyl 编序记号 $\vdots\ \vdots$, $\sum_{l=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{l!(n-k-l)!} Q^{n-k-l} P^k Q^l$ 是 Weyl 编序好了的,故而

$$\sum_{l=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{l!(n-k-l)!} Q^{n-k-l} P^k Q^l = \vdots \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{l!(n-k-l)!} Q^{n-k-l} P^k Q^l \vdots \tag{4.24}$$

并认为在 $\vdots\ \vdots$ 内部 $Q$, $P$ 是可对易的,于是式(4.23)右边的后半部分

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{l!(n-k-l)!} Q^{n-k-l} P^k Q^l = \vdots Q^{n-k} P^k \vdots \tag{4.25}$$

式(4.23)就可写为

$$(wP + \nu Q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k w^k \nu^{n-k} \vdots Q^{n-k} P^k \vdots \tag{4.26}$$

所以根据 Weyl 对应就有

$$\vdots Q^m P^n \vdots = \int \mathrm{d}p\mathrm{d}q q^m p^n \Delta(q,\ p) \tag{4.27}$$

从而可以看出 Wigner 算符的 Weyl 编序形式(也称为范氏形式)

$$\begin{aligned}\Delta(q,\ p) &= \vdots \delta(q-Q)\delta(p-P) \vdots \\ &= \vdots \delta(p-P)\delta(q-Q) \vdots\end{aligned} \tag{4.28}$$

这是一个很容易记住的公式,即 Wigner 算符的 Weyl 编序形式是 Dirac $\delta$-函数,因为它简洁,故很有用,文献中称为 Wigner 算符的范氏形式.这使我们想起了清代文人何绍基的对联:“物不求余随处足,事如能省此心情”,当我们能用简洁的方法或语言来阐述物理时,心情是多么阳光!马赫说:“科学的方法是最大限度地使思维活跃,花费尽可能最少的思维对事实作出尽可能最完善的陈述.”我们又想起物理学家赫兹,他十分重视数学符号在物理理论教学与科研中的重要性,他认为符号对于人有相对的独立性,“它比使用它的人聪明”.

接着有

$$q^m p^n \to \vdots Q^m P^n \vdots \tag{4.29}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(wp+vq)} \to \vdots \mathrm{e}^{\mathrm{i}(wP+vQ)} \vdots \tag{4.30}$$

所以 Weyl 对应此时就可以写为

$$\vdots h(Q,\ P) \vdots = \int \mathrm{d}p\mathrm{d}q h(q,\ p)\Delta(q,\ p) \tag{4.31}$$

式(4.31)说明一个已经 Weyl 编序好了的算符 $\vdots h(Q,\ P) \vdots$ 的经典对应函数能够直接地由 $Q\to q$,$P\to p$ 代替而得到,这是值得注意

的.另外要注意的是,若想脱去$\vdots\ \vdots$,必须先将其内部的算符排成 Weyl 编序. 因为 $Q = \dfrac{a+a^{\dagger}}{\sqrt{2}}$, $P = \dfrac{a-a^{\dagger}}{\sqrt{2}\mathrm{i}}$, $\alpha = \dfrac{q+\mathrm{i}p}{\sqrt{2}}$,式(4.28)又可写为

$$\Delta(\alpha,\alpha^*) = \frac{1}{2}\vdots\,\delta(a^{\dagger}-\alpha^*)\delta(a-\alpha)\,\vdots. \tag{4.32}$$

再令 $h(q,p) = f(\alpha,\alpha^*)$,则 Weyl 对应式(4.31)也可表示为

$$\vdots\, f(a,a^{\dagger})\,\vdots = 2\int \mathrm{d}^2\alpha f(\alpha,\alpha^*)\Delta(\alpha,\alpha^*) \tag{4.33}$$

## 4.3 Weyl 编序算符内的积分技术

在上节的基础上,我们给出 Weyl 编序算符内的积分技术的性质[3]:

(1) Weyl 对应规则式(4.9)本身可以纳入 Weyl 编序形式,即式(4.31)或式(4.33).

(2) 玻色算符 $a$, $a^{\dagger}$ 在 Weyl 编序记号$\vdots\ \vdots$内部是对易的.

(3) 可以对$\vdots\ \vdots$内部的 $c$ 数进行积分运算,只要该积分收敛.

(4) $\vdots\ \vdots$记号内部的$\vdots\ \vdots$记号可以取消.

(5) 相似变换不改变 Weyl 编序. 设 $V$ 为一个相似变换算符,则有

$$V\,\vdots\,(XY\cdots Z)\,\vdots\,V^{-1} = \vdots\,(VXY\cdots ZV^{-1})\,\vdots \tag{4.34}$$

即 $V$ 可以穿越$\vdots\ \vdots$,在下一节,将给出具体的证明和例子.

下面利用 Weyl 变换公式(4.7)来求 $Q^m P^r$ 的 Weyl 编序形式：

$$
\begin{aligned}
2\pi \mathrm{Tr}[Q^m P^r \Delta(q, p)] &= \int \mathrm{d}u \mathrm{e}^{\mathrm{i}pu} \left(q - \frac{u}{2}\right)^m \left\langle q - \frac{u}{2} \right| P^r \left| q + \frac{u}{2} \right\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}u \mathrm{e}^{\mathrm{i}pu} \left(q - \frac{u}{2}\right)^m \int \mathrm{d}p' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'u} p'^r \\
&= \int \mathrm{d}u \mathrm{e}^{\mathrm{i}pu} \left(q - \frac{u}{2}\right)^m \frac{\partial^r}{\partial(-\mathrm{i}u)^r} \delta(u) \\
&= (-\mathrm{i})^r \frac{\partial^r}{\partial u^r} \left[ \mathrm{e}^{\mathrm{i}pu} \left(q - \frac{u}{2}\right)^m \right]_{u=0} \\
&= (-\mathrm{i})^r \sum_{j=0}^{\min(r,m)} \binom{r}{j} (\mathrm{i}p)^{r-j} \mathrm{e}^{\mathrm{i}pu} \frac{\partial^j}{\partial u^j} \left(q - \frac{u}{2}\right)^m \bigg|_{u=0} \\
&= \sum_{j=0}^{\min(r,m)} \left(\frac{i}{2}\right)^j \binom{r}{j} \binom{m}{j} j! q^{m-j} p^{r-j}
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

再根据式(4.9)则有

$$
Q^m P^r = \iint \mathrm{d}q \mathrm{d}p \sum_{j=0} \left(\frac{i}{2}\right)^j \binom{r}{j} \binom{m}{j} j! q^{m-j} p^{r-j} \Delta(q, p)
\tag{4.36}
$$

将式(4.28)代入式(4.36)，并利用 Weyl 编序算符内的积分技术将有

$$
\begin{aligned}
Q^m P^r &= \iint \mathrm{d}q \mathrm{d}p \sum_{j=0}^{r} \left(\frac{i}{2}\right)^j \binom{r}{j} \binom{m}{j} j! q^{m-j} p^{r-j} \times \\
&\quad \vdots \delta(q - Q) \delta(p - P) \vdots \\
&= \sum_{j=0}^{r} \left(\frac{i}{2}\right)^j \frac{m! r!}{j! (m-j)! (r-j)!} \vdots Q^{m-j} P^{r-j} \vdots
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

这就是 $Q^m P^r$ 的 Weyl 编序展开. 再由厄米多项式的定义式(2.92)可以将式(4.37)简写为

$$\mathrm{i}^r(\sqrt{2}Q)^m(\sqrt{2}P)^r = \vdots \mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}Q, \sqrt{2}\mathrm{i}P) \vdots \tag{4.38}$$

这里得到一个新的算符公式.

## 4.4 Weyl 编序在相似变换下的不变性[4]

引进一个变换算符 $S$,其产生的相似变换为

$$SaS^{-1} = \mu a + \nu a^\dagger,\ Sa^\dagger S^{-1} = \sigma a + \tau a^\dagger, \tag{4.39}$$

其中 $\mu\tau - \sigma\nu = 1$,使得$[\mu a + \nu a^\dagger, \sigma a + \tau a^\dagger] = 1$. 现在要考察的是:相似变换的操作能否穿越 Weyl 编序的记号$\vdots\ \vdots$呢? 答案是肯定的. 下面就来证明这个结论. 对任意一个算符 $F(a^\dagger, a)$,根据 Weyl 对应规则得

$$F(a^\dagger, a) = 2\int \mathrm{d}^2\alpha f(\alpha^*, \alpha)\Delta(\alpha, \alpha^*) = \vdots f(a^\dagger, a) \vdots \tag{4.40}$$

其中 $f(\alpha^*, \alpha)$即为 $F(a^\dagger, a)$的 Weyl 对应;根据前面的章节,知道

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha, \alpha^*) &= \int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} \mid \alpha + z\rangle\langle \alpha - z \mid \mathrm{e}^{\alpha z^* - \alpha^* z} \\ &= \frac{1}{2} \vdots \delta(a^\dagger - \alpha^*)\delta(a - \alpha) \vdots\end{aligned} \tag{4.41}$$

是 Wigner 算符,且它的正规乘积展开为(4.12),在相似变换 $S$ 下,可得

$$\begin{aligned}S\Delta(\alpha, \alpha^*)S^{-1} = \frac{1}{2\pi^2}\int \mathrm{d}^2 z :\exp\{-|z|^2\left(\sigma\nu + \frac{1}{2}\right) + \\ z(\sigma a + \tau a^\dagger - \alpha^*) - z^*(\mu a + \nu a^\dagger - \alpha) + \\ \frac{1}{2}(\sigma\tau z^2 + \mu\nu z^{*2})\}:\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} :\exp\{-2(a^{\dagger} - \mu\alpha^{*} + \sigma\alpha)(a - \tau\alpha + \nu\alpha^{*})\}:. \tag{4.42}$$

将式(4.40)作相似变换，并结合式(4.41)和式(4.42)得

$$\begin{aligned}
&SF(a^{\dagger}, a)S^{-1} \\
&= \frac{2}{\pi}\int d^2\alpha f(\alpha^{*}, \alpha) :\exp\{-2(a^{\dagger} - \mu\alpha^{*} + \sigma\alpha)(a - \tau\alpha + \nu\alpha^{*})\}: \\
&= \int d^2\alpha f(\mu\alpha + \nu\alpha^{*}, \sigma\alpha + \tau\alpha^{*}) \vdots\delta(a^{\dagger} - \alpha^{*})\delta(a - \alpha)\vdots \\
&= \vdots f(\mu a + \nu a^{\dagger}, \sigma a + \tau a^{\dagger})\vdots
\end{aligned} \tag{4.43}$$

由式(4.40)和式(4.43)，得

$$S\vdots f(a^{\dagger}, a)\vdots S^{-1} = \vdots f(\mu a + \nu a^{\dagger}, \sigma a + \tau a^{\dagger})\vdots, \tag{4.44}$$

式(4.43)说明：相似变换操作可以穿过 Weyl 编序记号$\vdots\ \vdots$，即 Weyl 编序在相似变换下具有序不变性.

## 4.5 若干 Wigner 变换公式的简化

根据这个性质，就很容易推导出若干 Wigner 变换公式. 所谓光学中函数 $g(x)$的 Wigner 变换是指：

$$W(x,\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} g\left(x + \frac{x'}{2}\right) g^{*}\left(x - \frac{x'}{2}\right) \exp(-i2\pi\nu x')dx', \tag{4.45}$$

其中 $x$ 和 $\nu$ 可理解为函数 $g(x)$的空间变量和空间频率变量，它与 Wigner 算符 $\Delta(p, q)$的坐标表象有相同的结构，所以研究 $g(x)$作某些变换后所引起的 $W$ 的变换就可以转换为对 $\Delta(p, q)$实行的幺

正变换的研究；若 $S=(-)^N$，其中 $N=a^\dagger a$ 是粒子数算符，$S$ 为宇称算符，因 $(-1)^N P(-1)^N=-P$, $(-1)^N Q(-1)^N=-Q$，用式 (4.28) 就有

$$(-1)^N \Delta(p,q)(-1)^N = \vdots\delta(p+P)\delta(q+Q)\vdots = \Delta(-p,-q). \tag{4.46}$$

由 $(-1)^N|q\rangle=|-q\rangle$，则

$$\Delta(-p,-q)=\int\frac{du}{2\pi}e^{ipu}\left|-q-\frac{u}{2}\right\rangle\left\langle -q+\frac{u}{2}\right|. \tag{4.47}$$

式(4.47)说明：空间的反演变换 $|q\rangle\to|-q\rangle$（或者 $\langle f|q\rangle\equiv f(q)\to f(-q)$），使得相空间的分布函数 $W(p,q)\to W(-p,-q)$.

若 $S=e^{i\pi N/2}$，因

$$e^{i\pi N/2}Qe^{-i\pi N/2}=P,$$
$$e^{i\pi N/2}Pe^{-i\pi N/2}=-Q,$$
$$e^{i\pi N/2}|p\rangle=|-q\rangle_{q=p} \tag{4.48}$$

则

$$\begin{aligned}\Delta(q,-p)&=\vdots\delta(q-P)\delta(-p-Q)\vdots\\&=\vdots\delta(q-P)\delta(p+Q)\vdots\\&=e^{i\pi N/2}\vdots\delta(q-Q)\delta(p-P)\vdots e^{-i\pi N/2}\\&=e^{i\pi N/2}\Delta(p,q)e^{-i\pi N/2}.\end{aligned} \tag{4.49}$$

因此空间变换 $e^{i\pi N/2}|q\rangle\to|p\rangle_{p=q}$（或 $f(q)\to\int\exp[-ipq]f(q)dq$，也称为 Fraunhofer 衍射变换），使得 $W(p,q)\to W(q,-p)$.

若 Wigner 算符的变换为

$$\Delta(p,q)\to\Delta(p+2qs,q)$$

$$= \vdots \delta(p + 2qs - P)\delta(q - Q) \vdots = \vdots \delta(p - P + 2Qs)\delta(q - Q) \vdots$$

$$= e^{isQ^2}\Delta(p, q)e^{-isQ^2}, \tag{4.50}$$

则相应的空间变换为 $|f\rangle \to e^{-isQ^2}|f\rangle$(或 $f(q) \to f(q)e^{isq^2}$，也称为薄透镜变换)，而当

$$\Delta(p, q) \to \Delta(p, q - 2sp) = \vdots \delta(p - P)\delta(q - Q - 2sP) \vdots$$

$$= e^{isP^2}\Delta(p, q)e^{-isP^2}, \tag{4.51}$$

其相应的空间变换称为 Fresnel 衍射变换.

尽管前面几节的一些公式和计算看起来很数学化，但是却能精确而可靠地描述物理内在的某种联系. 正如 Einstein 所说的那样："数学给予精密的自然科学的某种程度的可靠性，没有数学，这些科学是达不到这种可靠性的"，"……通向更深入的基本知识的道路是同最精密的数学方法联系着的. "Dirac 也曾说："关于新物理的书如果不是纯粹描述实验工作的，就必须从根本上是数学性的. 虽然如此，数学毕竟是工具，人们应当学会在自己的思想中能不参考数学形式而把握住物理概念. "

## 4.6 化任意算符为 Weyl 编序形式的公式

上面给出了 Weyl 编序算符内的积分技术及其相关性质，读者不免要问，如何将一般的算符作 Weyl 编序展开呢? 这里用密度算符 $\rho$ 的 Weyl 编序展开，来说明一般算符 $A$ 的 Weyl 编序展开的方法. 密度算符在相干态表象中的 $P$ 表示为

$$\rho = \int \frac{d^2 z}{\pi} P(z) |z\rangle\langle z|. \tag{4.52}$$

Mehta 曾给出其逆关系[5]

$$P(z)=\mathrm{e}^{|z|^2}\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\langle-\beta\mid\rho\mid\beta\rangle\exp(|\beta|^2+\beta^*z-\beta z^*),\tag{4.53}$$

这里$|\beta\rangle$是相干态.相干态投影算符$|z\rangle\langle z|$的 Weyl 对应为

$$\begin{aligned}&2\pi\mathrm{Tr}[|z\rangle\langle z|\Delta(\alpha,\alpha^*)]\\&=\int\mathrm{d}u\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pu}\langle z\mid q-\frac{u}{2}\rangle\langle q+\frac{u}{2}\Big|z\rangle\\&=2\exp[-2|z|^2+\sqrt{2}q(z+z^*)-\sqrt{2}\mathrm{i}p(z-z^*)-q^2-p^2]\\&=2\exp[-2(z^*-\alpha^*)(z-\alpha)].\end{aligned}\tag{4.54}$$

再根据式(4.33)得$|z\rangle\langle z|$的 Weyl 编序展开为

$$\begin{aligned}|z\rangle\langle z|&=2\int\mathrm{d}^2\alpha\exp[-2(z^*-\alpha^*)(z-\alpha)]\,\vdots\,\delta(a^\dagger-\alpha^*)\delta(a-\alpha)\,\vdots\\&=2\,\vdots\exp[-2(z^*-a^\dagger)(z-a)]\vdots.\end{aligned}\tag{4.55}$$

于是相干态的完备性关系也可以纳入到 Weyl 编序的积分范畴来说明,即

$$\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}|z\rangle\langle z|=2\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\vdots\exp[-2(z^*-a^\dagger)(z-a)]\vdots=1.\tag{4.56}$$

将式(4.53)和式(4.55)代入式(4.52)得

$$\begin{aligned}\rho&=2\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\mathrm{e}^{|z|^2}\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\langle-\beta\mid\rho\mid\beta\rangle\exp(|\beta|^2+\beta^*z-\beta z^*)\times\\&\quad\vdots\exp[-2(z^*-a^\dagger)(z-a)]\vdots\\&=2\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\vdots\langle-\beta\mid\rho\mid\beta\rangle\exp[2(\beta^*a-\beta a^\dagger+a^\dagger a)]\vdots.\end{aligned}\tag{4.57}$$

这就是密度算符$\rho$的 Weyl 编序展开公式;对于一般的算符$A$,它

的 Weyl 编序展开也是

$$A = 2\int \frac{d^2\beta}{\pi} \vdots \langle -\beta | A | \beta \rangle \exp[2(\beta^* a - \beta a^\dagger + a^\dagger a)] \vdots. \tag{4.58}$$

作为例子[6]，可以计算出宇称算符 $(-)^N(N = a^\dagger a$ 是粒子数算符)的 Weyl 编序为

$$(-1)^N = \frac{1}{2} \vdots \delta(a^\dagger)\delta(a) \vdots. \tag{4.59}$$

而算符 $\exp(fa^\dagger b^\dagger)\exp(gab)$ 的 Weyl 编序为

$$\begin{aligned}
&\exp(fa^\dagger b^\dagger)\exp(gab) \\
&= 4\int \frac{d^2\beta_1 d^2\beta_2}{\pi^2} \exp(-2|\beta_1|^2 - 2|\beta_2|^2 + f\beta_1^*\beta_2^* + g\beta_1\beta_2) \times \\
&\vdots \exp[2(\beta_1^* a - \beta_1 a^\dagger + a^\dagger a) + 2(\beta_2^* b - \beta_2 b^\dagger + b^\dagger b)] \vdots \\
&= \vdots \frac{2}{4 - gf} \exp\left[\frac{1}{4 - gf}[4gab + 4fa^\dagger b^\dagger - 2gf(a^\dagger a + b^\dagger b)]\right] \vdots.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

可以看到，利用公式(4.58)，能方便地将一个算符变成它的 Weyl 编序形式.

## 4.7 用 Weyl 对应导出 Wigner 算符的相干态表象

作为式(4.58)的另一个应用，计算 $|z\rangle\langle -z|$ 的 Weyl 编序形式

$$\begin{aligned}
|z\rangle\langle -z| &= 2 \vdots \int \frac{d^2\beta}{\pi} |\langle -z | \beta \rangle|^2 \exp[2(\beta^* a - a^\dagger \beta + a^\dagger a)] \vdots \\
&= 2 \vdots \int \frac{d^2\beta}{\pi} \exp[-|\beta|^2 - |z|^2 - z^*\beta - z\beta^* +
\end{aligned}$$

$$2(\beta^* a - a^\dagger\beta + a^\dagger a)\big]\vdots$$

$$= 2\vdots\exp(2a^\dagger z - 2z^* a - 2a^\dagger a)\vdots \tag{4.61}$$

根据平移算符 $D(z) = \exp(za^\dagger - z^* a)$ 的性质

$$D(\alpha)aD^{-1}(\alpha) = a - \alpha,\ D(\alpha)a^\dagger D^{-1}(\alpha) = a^\dagger - \alpha^* \tag{4.62}$$

有

$$\begin{aligned}
&D(\alpha) \mid z\rangle\langle -z \mid D^\dagger(\alpha) \\
&= 2D(\alpha)\vdots\exp(2a^\dagger z - 2z^* a - 2a^\dagger a)\vdots D^\dagger(\alpha) \\
&= 2\vdots\exp[-2z^*(a-\alpha) + 2(a^\dagger - \alpha^*)z - 2(a^\dagger - \alpha^*)(a-\alpha)]\vdots
\end{aligned} \tag{4.63}$$

另一方面，

$$D(\alpha)D(z) \mid 0\rangle = D(\alpha + z)\exp\left[\frac{1}{2}(\alpha z^* - z\alpha^*)\right] \mid 0\rangle \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned}
\langle -z \mid D^\dagger(\alpha) &= \langle 0 \mid D^\dagger(-z)D^\dagger(\alpha) \\
&= \langle 0 \mid [D(\alpha)D(-z)]^\dagger \\
&= \langle 0 \mid D(z-\alpha)\exp\left[\frac{1}{2}(\alpha z^* - z\alpha^*)\right]
\end{aligned} \tag{4.65}$$

所以有

$$\begin{aligned}
&D(\alpha) \mid z\rangle\langle -z \mid D^\dagger(\alpha) \\
&= D(\alpha + z) \mid 0\rangle\langle 0 \mid D(z-\alpha)\exp(\alpha z^* - z\alpha^*) \\
&= \mid \alpha + z\rangle\langle \alpha - z \mid \exp(\alpha z^* - z\alpha^*)
\end{aligned} \tag{4.66}$$

将式(4.66)，(4.63)与 Wigner 算符的 Weyl 编序形式相比较，便得到 Wigner 算符的相干态表象

$$\int \frac{d^2 z}{\pi^2} \left| \alpha + z \right\rangle \left\langle \alpha - z \right| \exp(\alpha z^* - z\alpha^*)$$

$$= 2\int \frac{d^2 z}{\pi^2} \vdots \exp[-2z^*(a-\alpha) + 2(a^\dagger - \alpha^*)z - 2(a^\dagger - \alpha^*)(a-\alpha)] \vdots$$

$$= \frac{1}{2} \vdots \delta(a^\dagger - \alpha^*)\delta(a-\alpha) \vdots$$

$$= \vdots \delta(q-Q)\delta(p-P) \vdots$$

$$= \Delta(q, p) \tag{4.67}$$

## 4.8 用 Weyl 对应导出一类压缩相干态表象[7]

从前面知道 Wigner 算符的 Weyl 编序(范氏形式)为(4.28)，这是一个很有用的公式，它的边缘分布直接给出动量投影子

$$\int dq \Delta(p, q) = \int dq \vdots \delta(p-P)\delta(q-Q) \vdots$$

$$= \vdots \delta(p-P) \vdots = |p\rangle\langle p| \tag{4.68}$$

和坐标投影子

$$\int dp \Delta(p, q) = \vdots \delta(q-Q) \vdots = |q\rangle\langle q| \tag{4.69}$$

从式(4.28)也可看出 Wigner 算符是完备的，即

$$\iint dp dq \Delta(p, q) = 1 \tag{4.70}$$

观察下面的高斯积分，它也是等于 1 的，

$$\iint \frac{dp dq}{\pi} \vdots \exp[-(p-P)^2 - (q-Q)^2] \vdots = 1 \tag{4.71}$$

于是自然就有一个问题，这个 Weyl 编序好了的高斯积分具有什

么物理意义呢？也就是说

$$\vdots\exp[-(p-P)^2-(q-Q)^2]\vdots=? \tag{4.72}$$

它的物理意义是什么？

在给出这个问题的答案之前，先给出相干态投影算符的 Weyl 编序形式. 根据公式(4.58)和相干态的非正交性，有

$$\begin{aligned}|z\rangle\langle z| &= 2\vdots\int\frac{d^2\beta}{\pi}\langle-\beta|z\rangle\langle z|\beta\rangle\exp[2(\beta^* a-a^\dagger\beta+a^\dagger a)]\vdots \\ &= 2\vdots\exp[-2(z-a)(z^*-a^\dagger)]\vdots \\ &= 2\vdots\exp[-(p-P)^2-(q-Q)^2]\vdots\end{aligned} \tag{4.73}$$

其中 $z=\dfrac{q+\mathrm{i}p}{\sqrt{2}}$, $P=\dfrac{a-a^\dagger}{\mathrm{i}\sqrt{2}}$, $Q=\dfrac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}$，所以式(4.72)代表一个相干态投影子. $|z\rangle\langle z|$ 的 Weyl 编序是相空间的一个高斯函数，那么其边缘分布立即给出

$$\begin{aligned}\int dp\,|z\rangle\langle z| &= 2\sqrt{\pi}\vdots\exp[-(q-Q)^2]\vdots \\ &= 2\sqrt{\pi}\exp[-(q-Q)^2]\end{aligned} \tag{4.74}$$

$$\begin{aligned}\int dq\,|z\rangle\langle z| &= 2\sqrt{\pi}\vdots\exp[-(p-P)^2]\vdots \\ &= 2\sqrt{\pi}\exp[-(p-P)^2]\end{aligned} \tag{4.75}$$

现在再问，$\vdots\exp\left[-\dfrac{1}{\kappa}(p-P)^2-\kappa(q-Q)^2\right]\vdots$ 的物理意义又是什么呢？这个算符由范洪义首次提出，研究它是有意义的，因为其边缘分布给出

$$\int dp\vdots\exp\left[-\frac{1}{\kappa}(p-P)^2-\kappa(q-Q)^2\right]\vdots=\exp[-\kappa(q-Q)^2] \tag{4.76}$$

$$\int dq \vdots \exp\left[-\frac{1}{\kappa}(p-P)^2-\kappa(q-Q)^2\right]\vdots = \exp\left[-\frac{1}{\kappa}(p-P)^2\right] \tag{4.77}$$

定义 $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\kappa}q + \mathrm{i}\frac{p}{\sqrt{\kappa}}\right)$，注意到

$$D(\alpha)QD^{-1}(\alpha) = Q-\sqrt{\kappa}q,\ D(\alpha)PD^{-1}(\alpha) = P-\frac{q}{\sqrt{\kappa}} \tag{4.78}$$

并利用 Weyl 编序算符在相似变换下的序不变性，得到

$$\begin{aligned}
&D(\alpha)\mid 0\rangle\langle 0\mid D^{-1}(\alpha) \\
&= 2D(\alpha)\vdots \exp(-P^2-Q^2)\vdots D^{-1}(\alpha) \\
&= 2\vdots \exp\left[-\left(P-\frac{p}{\sqrt{\kappa}}\right)^2-(Q-\sqrt{\kappa}q)^2\right]\vdots
\end{aligned} \tag{4.79}$$

考虑到压缩算符

$$S(\sqrt{\kappa}) = \exp\left[\frac{1}{2}(a^{\dagger 2}-a^2)\ln\sqrt{\kappa}\right] \tag{4.80}$$

的作用，就可以改写

$$\begin{aligned}
&2\vdots \exp\left[-\frac{1}{\kappa}(p-P)^2-\kappa(q-Q)^2\right]\vdots \\
&= 2S(\sqrt{\kappa})\vdots \exp\left[-\left(P-\frac{p}{\sqrt{\kappa}}\right)^2-(Q-\sqrt{\kappa}q)^2\right]\vdots S^{-1}(\sqrt{\kappa}) \\
&= 2S(\sqrt{\kappa})D(\alpha)\vdots \exp(-P^2-Q^2)\vdots D^{-1}(\alpha)S^{-1}(\sqrt{\kappa}) \\
&= S(\sqrt{\kappa})D(\alpha)\mid 0\rangle\langle 0\mid D^{-1}(\alpha)S^{-1}(\sqrt{\kappa}) \\
&\equiv \mid \Upsilon\rangle\langle \Upsilon\mid
\end{aligned} \tag{4.81}$$

其中

$$|\Upsilon\rangle = S(\sqrt{\kappa})D\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\kappa}q + \mathrm{i}\frac{p}{\sqrt{\kappa}}\right)\right]|0\rangle \tag{4.82}$$

是一个压缩相干态. 它是完备的

$$\iint \mathrm{d}q\mathrm{d}p\, |\Upsilon\rangle\langle\Upsilon| = 1 \tag{4.83}$$

可以构成一个新的表象.

## 4.9 用压缩相干态分析 Husimi 函数

根据 Weyl 对应和式(4.28)有

$$\begin{aligned} &2\,\vdots\exp\left[-\frac{1}{\kappa}(p-P)^2 - \kappa(q-Q)^2\right]\vdots \\ &= 2\iint \mathrm{d}p'\mathrm{d}q'\exp\left[-\frac{1}{\kappa}(p'-p)^2 - \kappa(q'-q)^2\right]\Delta(q',\ p') \end{aligned} \tag{4.84}$$

从式(4.84)右边可以看到, $\exp\left[-\frac{1}{\kappa}(p'-p)^2 - \kappa(q'-q)^2\right]$ 是一个高斯颗粒函数,它的目的是“光滑”Wigner 算符 $\Delta(q',\ p')$,光滑以后的算符记为 $\Delta_h$,于是有

$$\begin{aligned} W_h(q',\ p') &\equiv \langle\psi|\Delta_h(q',\ p')|\psi\rangle \\ &= 2\iint \mathrm{d}p'\mathrm{d}q'\exp\left[-\frac{1}{\kappa}(p'-p)^2 - \kappa(q'-q)^2\right]W(q',\ p') \end{aligned} \tag{4.85}$$

称 $W_h$ 为 Husimi 函数. 从式(4.85)及式(4.81)可见

$$W_h(q',\ p') = \langle\psi|\Upsilon\rangle\langle\Upsilon|\psi\rangle = |\langle\Upsilon|\psi\rangle|^2 \tag{4.86}$$

可见密度矩阵 $\rho$ 的 Husimi 函数[8]的本质实际上是 $\mathrm{Tr}(\rho\,|\Upsilon\rangle\langle\Upsilon|)$.

## 4.10 用 Weyl 对应导出广义相干态表象

类似于式(4.79)到式(4.81)的计算，让 $\gamma\beta-\tau\delta=1$，得到

$$
\begin{aligned}
&D(z')\mid 0\rangle\langle 0\mid D^{-1}(z') \\
&=2D(z'):\exp(-P^2-Q^2):D^{-1}(z') \\
&=2:\exp\left[-\left(P-\frac{p}{\beta\sqrt{\kappa}}\right)^2-\left(Q+\frac{\sqrt{\kappa}q}{\delta}\right)^2\right]:
\end{aligned}
\tag{4.87}
$$

其中

$$
z'\equiv\left[-\sqrt{\kappa}q/\delta+\mathrm{i}p/(\beta\sqrt{\kappa})\right]/\sqrt{2}\,,\ \kappa=-\tau\delta/\gamma\beta \tag{4.88}
$$

做压缩变换就给出

$$
\begin{aligned}
&2S(\sqrt{-\tau\delta/\beta\gamma}):\exp\left[-\left(P-\frac{p}{\beta\sqrt{\kappa}}\right)^2-\left(Q+\frac{\sqrt{\kappa}q}{\delta}\right)^2\right]:\times \\
&S^{-1}(\sqrt{-\tau\delta/\beta\gamma}) \\
&=\frac{2}{\pi}:\exp\left[\frac{\tau\delta}{\beta\gamma}\left(\frac{q}{\delta}+Q\right)^2+\frac{\beta\gamma}{\tau\delta}\left(\frac{p}{\beta}-P\right)^2\right]: \\
&\equiv\mid\Phi\rangle\langle\Phi\mid
\end{aligned}
\tag{4.89}
$$

其中定义了

$$
\begin{aligned}
\mid\Phi\rangle=\ &S^{-1}(\sqrt{-\tau\delta/\beta\gamma})D\{[-q\sqrt{-\tau\delta/\beta\gamma}/\delta+ \\
&\mathrm{i}p/(\beta\sqrt{-\tau\delta/\beta\gamma})]/\sqrt{2}\}\mid 0\rangle
\end{aligned}
\tag{4.90}
$$

这是一个广义压缩相干态.忽略一个不重要的相因子则得到

$$
\begin{aligned}
\mid\Phi\rangle\equiv\ &(-4\tau\beta\gamma\delta)^{1/4}\exp\left[\frac{\tau q^2}{2\delta}-\frac{\gamma p^2}{2\beta}+\sqrt{2}(\tau q+\mathrm{i}\gamma p)a^{\dagger}+\right. \\
&\left.\frac{\beta\gamma+\tau\delta}{2}a^{\dagger 2}\right]\mid 0\rangle
\end{aligned}
\tag{4.91}
$$

利用IWOP积分技术可以计算

$$\frac{1}{2|\beta\delta|}\iint \frac{\mathrm{d}q\mathrm{d}p}{\pi}|\Phi\rangle\langle\Phi| = 1 \tag{4.92}$$

$|\Phi\rangle$ 是由胡利云、范洪义首次提出的广义相空间的基.

同样地,由 Weyl 对应亦有

$$\frac{2}{\pi} \vdots \exp\left[\frac{\tau\delta}{\gamma\beta}\left(\frac{q}{\delta}+Q\right)^2+\frac{\gamma\beta}{\tau\delta}\left(\frac{p}{\beta}-P\right)^2\right] \vdots$$

$$=\frac{2}{\pi}\iint \mathrm{d}p'\mathrm{d}q'\exp\left[\frac{\tau\delta}{\gamma\beta}\left(\frac{q'}{\delta}+q\right)^2+\frac{\gamma\beta}{\tau\delta}\left(\frac{p'}{\beta}-p\right)^2\right]\Delta(q', p') \tag{4.93}$$

从式(4.93)右边可以看到,$\exp\left[\frac{\tau\delta}{\gamma\beta}\left(\frac{q'}{\delta}+q\right)^2+\frac{\gamma\beta}{\tau\delta}\left(\frac{p'}{\beta}-p\right)^2\right]$是更为广义的高斯颗粒函数,它的目的是更广义地"光滑"Wigner 函数 $W(q', p')$,光滑以后的函数叫广义 Husimi 函数,即

$$W_g(q', p') = 2\iint \mathrm{d}p'\mathrm{d}q'\exp\left[\frac{\tau\delta}{\gamma\beta}\left(\frac{q'}{\delta}+q\right)^2+\frac{\gamma\beta}{\tau\delta}\left(\frac{p'}{\beta}-p\right)^2\right]W(q', p') \tag{4.94}$$

由于

$$W_g(q', p') = \langle\psi|\Phi\rangle\langle\Phi|\psi\rangle = |\langle\Phi|\psi\rangle|^2 \tag{4.95}$$

这就很简明地阐述了广义 Husimi 函数的本质实际上是 $\mathrm{Tr}(\rho|\Phi\rangle\langle\Phi|)$.

根据 Weyl 编序算符在相似变换下的不变性,我们能够非常直接地构造出广义压缩相干态表象,而且这种方法简洁方便,可以被推广到构造其他量子力学表象.

## 4.11 Weyl 对应和相干态对应[9]

相干态是量子力学的一个重要概念,它是最接近于经典的态,可以描写激光的量子态. 相干态有一个重要性质,就是它的超完备性与非正交性,从而构成表象,可以用来表达算符与其各种经典对应的联系.

一般而言,一个量子算符只有在某个表象中所有的矩阵元都知道了才能被确定. 可是当一个量子算符的相干态平均值(对角表示)知道了,这个算符本身就确定了,这是一个值得注意的性质. 本节将用 Weyl - Winger 对应来证明之.

首先把粒子数态的完备性表达为与相干态有关的形式,由粒子数态表式 $|n\rangle = \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle$ 可知

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| \\ &= \sum_{n,n'=0}^{\infty} |n\rangle\langle n'| \frac{1}{\sqrt{n!n'!}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^*}\right)^n (z^*)^{n'} \bigg|_{z^*=0} \\ &= \exp\left(a^\dagger \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^*}\right)|0\rangle\langle 0| \mathrm{e}^{z^* a}\bigg|_{z^*=0}, \end{aligned} \tag{4.96}$$

于是可把任一算符 $A$ 表达为

$$\begin{aligned} &A(a^\dagger, a) \\ &= \exp\left(a^\dagger \frac{\partial}{\partial z^*}\right)|0\rangle\langle z \| A \| z\rangle\langle 0| \exp\left(a \frac{\partial}{\partial z}\right)\bigg|_{z=z^*=0} \end{aligned} \tag{4.97}$$

其中应用了未归一化的相干态 $\| z\rangle = \mathrm{e}^{za^\dagger}|0\rangle$ 的定义,以及 $z$ 与 $z^*$ 独立的事实, $\frac{\partial}{\partial z^*}z = 0$, $\frac{\partial}{\partial z}z^* = 0$, 再由真空投影算符的正规乘积形式 $|0\rangle\langle 0| = :\mathrm{e}^{-a^\dagger a}:$ 和正规乘积的性质进一步改写式

(4.97)为

$$A(a^\dagger, a) = :\exp\left(a^\dagger \frac{\partial}{\partial z^*} + a\frac{\partial}{\partial z} - a^\dagger a\right): \mathrm{e}^{|z|^2}\langle z \mid A \mid z\rangle\Big|_{z=z^*=0} \tag{4.98}$$

由莱布尼茨公式可化简式(4.98).

$$\begin{aligned}
\text{式(4.98) 右边} &= :\mathrm{e}^{-a^\dagger a}\exp\left(a^\dagger \frac{\partial}{\partial z^*}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n \mathrm{e}^{|z|^2}\times \\
&\quad \langle z \mid A \mid z\rangle\Big|_{z=z^*=0}: \\
&= :\mathrm{e}^{-a^\dagger a}\exp\left(a^\dagger \frac{\partial}{\partial z^*}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\sum_{l=0}^{n}\mathrm{C}_n^l\left[\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^l \mathrm{e}^{|z|^2}\right]\times \\
&\quad \left[\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-l}\langle z \mid A \mid z\rangle\right]\Big|_{z=z^*=0}: \\
&= :\mathrm{e}^{-a^\dagger a}\exp\left(a^\dagger \frac{\partial}{\partial z^*}\right)\mathrm{e}^{|z|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\left(z^* + \frac{\partial}{\partial z}\right)^n \times \\
&\quad \langle z \mid A \mid z\rangle\Big|_{z=z^*=0}: \\
&= :\mathrm{e}^{-a^\dagger a}\exp\left(a^\dagger \frac{\partial}{\partial z^*}\right)\mathrm{e}^{|z|^2}\exp\left[a\left(z^* + \frac{\partial}{\partial z}\right)\right]\times \\
&\quad \langle z \mid A \mid z\rangle\Big|_{z=z^*=0}: \\
&= :\mathrm{e}^{-a^\dagger a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^{\dagger m}}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial z^*}\right)^m \mathrm{e}^{(z+a)z^*}\exp\left(a\frac{\partial}{\partial z}\right)\times \\
&\quad \langle z \mid A \mid z\rangle\Big|_{z=z^*=0}: \\
&= :\mathrm{e}^{-a^\dagger a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^{\dagger m}}{m!}\sum_{k=0}^{m}\mathrm{C}_m^k\left[\left(\frac{\partial}{\partial z^*}\right)^k \mathrm{e}^{(z+a)z^*}\right]\times \\
&\quad \left[\left(\frac{\partial}{\partial z^*}\right)^{m-k}\exp\left(a\frac{\partial}{\partial z}\right)\langle z \mid A \mid z\rangle\right]\Big|_{z=z^*=0}: \\
&= :\mathrm{e}^{-a^\dagger a}\mathrm{e}^{(z+a)z^*}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^{\dagger m}}{m!}\left(z + a + \frac{\partial}{\partial z^*}\right)^m \times
\end{aligned}$$

$$\exp\left(a\frac{\partial}{\partial z}\right)\langle z\mid A\mid z\rangle\Big|_{z=z^*=0}:$$
$$=:\mathrm{e}^{-a^{\dagger}a}\mathrm{e}^{(z+a)z^*}\exp\left[a^{\dagger}\left(z+a+\frac{\partial}{\partial z^*}\right)\right]\times$$
$$\exp\left(a\frac{\partial}{\partial z}\right)\langle z\mid A\mid z\rangle\Big|_{z=z^*=0}:$$
$$=:\exp\left[a^{\dagger}\frac{\partial}{\partial z^*}+a\frac{\partial}{\partial z}\right]:\langle z\mid A\mid z\rangle\Big|_{z=z^*=0} \tag{4.99}$$

以上计算表明，$\exp\left(a^{\dagger}\dfrac{\partial}{\partial z^*}\right)$的功能是把 $f(z, z^*)$中的 $z^*$ 变为 $a^{\dagger}$，$\exp\left(a\dfrac{\partial}{\partial z}\right)$的功能是把 $f(z, z^*)$中的 $z$ 变为 $a$，从而 $\mathrm{e}^{|z|^2}\to\mathrm{e}^{a^{\dagger}a}$. 式(4.99)说明由$\langle z|A|z\rangle$可决定 $A$ 本身. 为了证明其唯一性，用 Weyl - Winger 对应来求证.

由 Weyl 对应规则知 $A$ 的相干态平均

$$\langle z\mid A\mid z\rangle=2\int\mathrm{d}^2\alpha\langle z\mid\Delta(\alpha,\alpha^*)\mid z\rangle A(\alpha,\alpha^*) \tag{4.100}$$

将式(4.12)代入式(4.100)可得

$$\langle z\mid A\mid z\rangle$$
$$=\iint\frac{\mathrm{d}q\mathrm{d}p}{\pi}\exp\left[-2\left(z^*-\frac{q-\mathrm{i}p}{\sqrt{2}}\right)\left(z-\frac{q+\mathrm{i}p}{\sqrt{2}}\right)\right]\mathscr{A}(p,q) \tag{4.101}$$

其中 $\alpha=\dfrac{q+\mathrm{i}p}{\sqrt{2}}$，$A(\alpha,\alpha^*)=\mathscr{A}(p,q)$，于是 Weyl 对应式(4.9)就变为

$$A=\iint\frac{\mathrm{d}q\mathrm{d}p}{\pi}:\exp\left[-2\left(a^{\dagger}-\frac{q-\mathrm{i}p}{\sqrt{2}}\right)\left(a-\frac{q+\mathrm{i}p}{\sqrt{2}}\right)\right]\mathscr{A}(p,q):$$
$$=:\exp\left(a^{\dagger}\frac{\partial}{\partial z^*}+a\frac{\partial}{\partial z}\right):\iint\frac{\mathrm{d}q\mathrm{d}p}{\pi}\times$$

$$\exp\left[-2\left(z^{*}-\frac{q-\mathrm{i}p}{\sqrt{2}}\right)\left(z-\frac{q+\mathrm{i}p}{\sqrt{2}}\right)\right]\mathscr{A}(p,\ q)\Big|_{z=z^{*}=0}$$

$$=:\exp\left(a^{\dagger}\frac{\partial}{\partial z^{*}}+a\frac{\partial}{\partial z}\right):\langle z\mid A\mid z\rangle\Big|_{z=z^{*}=0} \tag{4.102}$$

在最后一步用到了式(4.101). 由于 Weyl 对应是唯一的,故当一个量子算符的相干态平均值知道了,这个算符的本身就确定了.

## 4.12 由 Wigner 算符的正规乘积高斯形式重述量子相空间表象[10]

由 IWOP 积分技术,可以将牛顿-莱布尼茨积分从以前仅适用于一般函数推广到适用于量子力学的 ket - bra 算符. 现在我们可以将坐标本征矢的完备性关系表达为正规乘积内的高斯积分形式(2.53),而动量本征矢的完备性关系为正规乘积形式(2.54),因此,由式(2.53)和式(2.54)可以直接构造出 Wigner 算符,即式(4.12).

在这一节,利用式(4.12)和 IWOP 积分技术去发展密度算符的量子相空间描述,这种方法简洁直接.

### 4.12.1 Wigner 算符坐标表象的获得

由 IWOP 技术,可以将式(4.12)改写为

$$\begin{aligned}\Delta(q,\ p)&=\frac{1}{\pi}:\mathrm{e}^{-(q-Q)^{2}-(p-P)^{2}}:\\&=\iint\frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\nu}{4\pi^{2}}:\exp\left[\mathrm{i}(q-Q)u+\mathrm{i}(p-P)\nu-\frac{u^{2}+\nu^{2}}{2}\right]:\end{aligned} \tag{4.103}$$

再由 $[Q,\ P]=\mathrm{i}$ 以及 Baker - Hausdorff 公式得到

$$\begin{aligned}\Delta(q,\ p)&=\iint\frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\nu}{4\pi^{2}}\exp[\mathrm{i}(q-Q)u+\mathrm{i}(p-P)\nu]\\&=\iint\frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\nu}{4\pi^{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\nu}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}P(\nu/2)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q-Q)u}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}P(\nu/2)}\end{aligned} \tag{4.104}$$

进一步，利用 $e^{-iP(\nu/2)}\ |q\rangle = |q+(\nu/2)\rangle$ 和 $\int \frac{du}{2\pi} e^{i(q-Q)u} = \delta(q-Q) = |q\rangle\langle q|$，方程(4.104)就变为

$$\begin{aligned}\Delta(q,\ p) &= \int \frac{d\nu}{2\pi} e^{ip\nu} e^{-iP(\nu/2)}\ |q\rangle\langle q|\ e^{-iP(\nu/2)} \\ &= \int \frac{d\nu}{2\pi} e^{ip\nu} \left|q+\frac{\nu}{2}\right\rangle\left\langle q-\frac{\nu}{2}\right| \end{aligned} \tag{4.105}$$

这就是 Wigner 算符的坐标表象形式.

## 4.12.2 Wigner 算符相干态表象的获得

令 $\alpha = \frac{q+ip}{\sqrt{2}}$，方程(4.12)变为

$$\begin{aligned}\Delta(q,\ p) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} :e^{-2(\alpha^*-a^\dagger)(\alpha-a)}: \\ &= \int \frac{d^2z}{2\pi^2} :\exp\left[-\frac{1}{2}|z|^2 + z(a^\dagger-\alpha^*) - z^*(a-\alpha)\right]: \\ &= \int \frac{d^2z}{2\pi^2} \exp[z(a^\dagger-\alpha^*) - z^*(a-\alpha)] \equiv \Delta(\alpha^*,\ \alpha) \end{aligned} \tag{4.106}$$

式(4.106)的一个可以替代的积分形式是

$$\begin{aligned}\Delta(q,\ p) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} :e^{-2(\alpha^*-a^\dagger)(\alpha-a)}: \\ &= \int \frac{d^2z}{2\pi^2} :\exp[-|z|^2 + (\alpha+z)a^\dagger + (\alpha^*-z^*)a - \\ &\quad \alpha a^\dagger + \alpha z^* - z\alpha^* - |\alpha|^2]: \end{aligned} \tag{4.107}$$

利用 $|0\rangle\langle 0| = :e^{-a^\dagger a}:$ 及相干态表象 $|z\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2 + za^\dagger\right)|0\rangle$，式(4.107)变为

$$\Delta(q,\ p) = \int \frac{d^2 z}{\pi^2} \mid \alpha + z\rangle\langle \alpha - z \mid e^{\alpha z^* - z\alpha^*} \qquad (4.108)$$

这就是 Wigner 算符的相干态表象形式. 化为$(a^\dagger,\ a)$形式,$H(P,\ Q) \to G(a^\dagger,\ a)$,$h(q,\ p) \to g(\alpha^*,\ \alpha)$,所以 Weyl 编序式(4.9)变为

$$G(a^\dagger,\ a) = 2\int d^2\alpha \Delta(\alpha^*,\ \alpha) g(\alpha^*,\ \alpha) \qquad (4.109)$$

将式(4.106)代入式(4.109)并取其相干态矩阵元,得到

$$\begin{aligned} \langle -z \mid G(a^\dagger,\ a) \mid z\rangle &= \frac{2}{\pi}\int d^2\alpha g(\alpha^*,\ \alpha)\langle -z \mid :e^{-2(\alpha^* - a^\dagger)(\alpha - a)}: \mid z\rangle \\ &= \frac{2}{\pi}\int d^2\alpha g(\alpha^*,\ \alpha) e^{-2(\alpha z^* - z\alpha^*) - 2|\alpha|^2} \qquad (4.110) \end{aligned}$$

由于 $e^{-2(\alpha z^* - z\alpha^*)}$可以被看做一个傅里叶变换核,所以式(4.110)的逆变换为

$$g(\alpha^*,\ \alpha) = 2e^{2|\alpha|^2}\int \frac{d^2 z}{\pi}\langle -z \mid G(a^\dagger,\ a) \mid z\rangle e^{-2(z\alpha^* - \alpha z^*)} \qquad (4.111)$$

这是寻找算符 $G(a^\dagger,\ a)$的经典对应的一个新公式. 例如,对于等式(2.41),$e^{\lambda a^\dagger a}$的经典对应 $g(\alpha^*,\ \alpha)$是

$$\begin{aligned} g_1(\alpha^*,\ \alpha) &= 2e^{2|\alpha|^2}\int \frac{d^2 z}{\pi}\langle -z \mid :\exp[(e^\lambda - 1)a^\dagger a]: \mid z\rangle e^{-2(z\alpha^* - \alpha z^*)} \\ &= \frac{2}{e^\lambda + 1}\exp\left[\frac{2(e^\lambda - 1)}{e^\lambda + 1} \mid \alpha \mid^2\right] \qquad (4.112) \end{aligned}$$

式(4.111)还可以进一步被写为[11]

$$g(\alpha,\ \alpha^*) = 2\pi e^{2|\alpha|^2}\,\mathrm{Tr}\int \frac{d^2 z}{\pi^2} G(a,\ a^\dagger) \mid z\rangle\langle -z \mid e^{-2(\alpha^* z - \alpha z^*)} \qquad (4.113)$$

其中 $e^{2|\alpha|^2}\int \frac{d^2 z}{\pi^2} \mid z\rangle\langle -z \mid e^{-2(\alpha^* z - \alpha z^*)}$ 就是 Wigner 算符的相干态表

象. 因为利用公式

$$\int \frac{d^2 z}{\pi} \exp(\varsigma \mid z \mid^2 + \xi z + \eta z^*) = -\frac{1}{\varsigma} \exp\left(\frac{-\xi\eta}{\varsigma}\right), \ \mathrm{Re}(\varsigma) < 0 \tag{4.114}$$

可得

$$\begin{aligned}
& e^{2|\alpha|^2} \int \frac{d^2 z}{\pi^2} \mid z\rangle\langle -z \mid e^{-2(\alpha^* z - \alpha z^*)} \\
&= \int \frac{d^2 z}{\pi^2} : \exp[-\mid z \mid^2 + z(a^\dagger - 2\alpha^*) + z^*(-a + 2\alpha) + \\
&\quad 2 \mid \alpha \mid^2 - a^\dagger a] : \\
&= \frac{1}{\pi} : \exp[-2(a^\dagger - \alpha^*)(a - \alpha)] : \\
&= \Delta(\alpha, \alpha^*),
\end{aligned} \tag{4.115}$$

因而

$$g(\alpha, \alpha^*) = 2\pi \mathrm{Tr}[G(a, a^\dagger)\Delta(\alpha, \alpha^*)] \tag{4.116}$$

这是求 $G$ 的经典 Weyl 对应函数的公式，验证了前面的结论. 作为式(4.116)和式(4.108)的应用，考虑

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[G_1 G_2] &= 2\mathrm{Tr}\left[G_1 \int d^2\alpha \Delta(\alpha, \alpha^*) g_2(\alpha, \alpha^*)\right] \\
&= \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha [g_1(\alpha, \alpha^*) g_2(\alpha, \alpha^*)]
\end{aligned} \tag{4.117}$$

可见，两个密度算符的乘积的迹由相应的 Weyl 对应函数的乘积在相空间的积分决定. 当 $G_1 = \mid \phi\rangle\langle\phi \mid$, $G_2 = \mid \varphi\rangle\langle\varphi \mid$ 时，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[G_1 G_2] &= \mathrm{Tr}[\mid \phi\rangle\langle\phi \| \varphi\rangle\langle\varphi \mid] \\
&= \langle\varphi \| \phi\rangle\langle\phi \| \varphi\rangle \\
&= \mid \langle\varphi \| \phi\rangle \mid^2
\end{aligned} \tag{4.118}$$

当 $\phi = \varphi$ 是归一化的态矢量时，即 $G_1 = G_2$ 时

$$\mathrm{Tr}[G_1 G_2] = \mathrm{Tr}[G_1^2] = 1 \tag{4.119}$$

因此，根据式(4.117)可得

$$\frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}^2\alpha g_1^2(\alpha, \alpha^*) = 1 \tag{4.120}$$

### 4.12.3 得到 Wigner 算符 Weyl 编序形式的新方法

作为式(4.111)的应用，看另一个例子，$\exp(\beta a^\dagger - \beta^* a)$的经典对应函数是

$$\begin{aligned} g(\alpha^*, \alpha) &= 2\mathrm{e}^{2|\alpha|^2}\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\langle -z \mid \exp(\beta a^\dagger - \beta^* a) \mid z\rangle \mathrm{e}^{-2(z\alpha^* - \alpha z^*)} \\ &= 2\mathrm{e}^{2|\alpha|^2 - |\beta|^2/2}\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\mathrm{e}^{-2|z|^2 - 2(z\alpha^* - \alpha z^*) - \beta z^* - z\beta^*} \\ &= \exp(\beta\alpha^* - \beta^* \alpha) \end{aligned} \tag{4.121}$$

这意味着

$$\exp(\beta a^\dagger - \beta^* a) = 2\int \mathrm{d}^2\alpha \Delta(\alpha^*, \alpha)\exp(\beta\alpha^* - \beta^* \alpha) \tag{4.122}$$

所以 $\Delta(\alpha^*, \alpha)$必是某种编序好了(不同于方程(4.12)，这里用$\vdots\ \vdots$标志，即 Weyl 编序)的 δ 函数形式

$$\Delta(\alpha^*, \alpha) = \frac{1}{2}\vdots\delta(a^\dagger - \alpha^*)\delta(a - \alpha)\vdots \tag{4.123}$$

这就是 Wigner 算符的 Weyl 编序形式. 比较式(4.122)和式(4.123)，有

$$\exp(\beta a^\dagger - \beta^* a) = \vdots\exp(\beta a^\dagger - \beta^* a)\vdots \tag{4.124}$$

$$2\int \mathrm{d}^2\alpha \Delta(\alpha^*, \alpha)\, g(\alpha^*, \alpha) = G(a^\dagger, a)$$

$$= \int d^2\alpha \vdots \delta(a^\dagger - \alpha^*)\delta(a - \alpha) \vdots 2e^{2|\alpha|^2} \int \frac{d^2 z}{\pi}$$

$$\langle -z \mid G(a^\dagger, a) \mid z \rangle e^{-2(\alpha z^* - z\alpha^*)}$$

$$= 2 \vdots \int \frac{d^2 z}{\pi} \langle -z \mid G \mid z \rangle \exp[2(a^\dagger a +$$

$$az^* - za^\dagger)] \vdots \tag{4.125}$$

这是将任意算符 $G$ 化为 Weyl 编序形式的公式. 将式(4.123)写成 $(P, Q)$ 形式,即

$$\Delta(q, p) = \vdots \delta(q - Q)\delta(p - P) \vdots$$

$$= \iint \frac{du d\nu}{4\pi^2} \vdots \exp[i(q - Q)u + i(p - P)\nu] \vdots \tag{4.126}$$

所以

$$F(P, Q) = \iint dp dq \vdots \delta(q - Q)\delta(p - P) \vdots f(p, q) = \vdots f(P, Q) \vdots \tag{4.127}$$

这就是求算符 Weyl 编序形式的公式.

## 4.13 原子相干态的 Wigner 函数[12]

### 4.13.1 原子相干态的介绍

从光子相干态概念人们自然会想到原子相干态(也称为自旋相干态),或从玻色子相干态想到原子相干态,它已经被成功应用到物理学的各个领域. 自旋算符满足

$$[J_+, J_-] = 2J_z, [J_\pm, J_z] = \mp J_\pm \tag{4.128}$$

仿照玻色子相干态,人们构造了原子相干态,又称自旋相干态(自

旋值为 $j$)

$$|\tau\rangle = \exp(\mu J_+ - \mu^* J_-)\,|j, -j\rangle$$
$$= (1+|\tau|^2)^{-j} e^{\tau J_+}\,|j, -j\rangle \tag{4.129}$$

$\mu$ 与 $\tau$ 的关系是

$$\mu = \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi},\ \tau = e^{-i\varphi} \tan \frac{\theta}{2} \tag{4.130}$$

在 $j$ 值的自旋态 $|j, m\rangle$ 张成的子空间中,可以证明

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi}\,|\tau\rangle\langle\tau| = \sum_{m=-j}^{j} |j, m\rangle\langle j, m| = 1,\ d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi \tag{4.131}$$

原子相干态是不正交的,其内积为

$$\langle\tau' | \tau\rangle = (1+\tau'\tau^*)^{2j}/(1+|\tau|^2)^j (1+|\tau'|^2)^j \tag{4.132}$$

利用对易关系式(4.128),可证 $|\tau\rangle$ 满足的本征方程为

$$(J_- + \tau^2 J_+)\,|\tau\rangle = 2j\tau\,|\tau\rangle$$
$$(J_- + \tau J_z)\,|\tau\rangle = j\tau\,|\tau\rangle$$
$$(\tau J_+ - J_z)\,|\tau\rangle = j\,|\tau\rangle \tag{4.133}$$

引入态 $|\zeta\rangle$ 来研究 $|\tau\rangle$ 的性质,以便建立一个与原子相干态相关的波函数方程. 利用角动量的 Schwinger 玻色子实现

$$J_+ = a^\dagger b,\ J_- = b^\dagger a,\ J_z = \frac{1}{2}(a^\dagger a - b^\dagger b) \tag{4.134}$$

相应的态 $|j, m\rangle$ 表示为

$$|j, m\rangle = \frac{a^{\dagger(j+m)} b^{\dagger(j-m)}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}\,|00\rangle = |j+m\rangle \otimes |j-m\rangle \tag{4.135}$$

在双模 Fock 空间，$|\tau\rangle$表示为

$$
\begin{aligned}
|\tau\rangle &= \exp(\mu J_{+} - \mu^{*} J_{-})\,|0\rangle \otimes |2j\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2j)!}}\left(b^{\dagger}\cos\frac{\theta}{2} + a^{\dagger}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2j}|00\rangle \\
&= \frac{1}{(1+|\tau|^{2})^{j}}\sum_{l=0}^{2j}\left[\frac{(2j)!}{(2j-l)!\,l!}\right]^{1/2}\tau^{2j-l}\,|2j-l\rangle \otimes |l\rangle
\end{aligned}
\tag{4.136}
$$

这是一种 Schmidt 分解形式. 在双模 Fock 空间存在着一个扩展了的完备性：

$$
\sum_{2j=0}^{\infty}(2j+1)\int\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}\,|\tau\rangle\langle\tau| = 1,\ j = 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ \cdots
\tag{4.137}
$$

利用 IWOP 技术可以证明式(4.137)

$$
\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}\,|\tau\rangle\langle\tau| &= \frac{1}{(2j)!}\int_{0}^{\pi}\mathrm{d}\theta\sin\theta\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi :\left(b^{\dagger}\cos\frac{\theta}{2} + a^{\dagger}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2j}\times \\
&\qquad \left(b\cos\frac{\theta}{2} + a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2j}\exp(-a^{\dagger}a - b^{\dagger}b): \\
&= \frac{1}{2j+1}\frac{1}{(2j)!} :(a^{\dagger}a + b^{\dagger}b)^{2j}\exp(-a^{\dagger}a - b^{\dagger}b):
\end{aligned}
\tag{4.138}
$$

代入到式(4.137)求和即得证.

### 4.13.2 原子相干态与纠缠态的内积

用双变数厄米多项式得母函数公式，可将未归一化的纠缠态

$$
\langle\zeta| = \langle 00|\exp(-ab + a\zeta + b\zeta^{*})
\tag{4.139}
$$

展开为

$$
\langle\zeta| = \sum_{m,\,n=0}^{\infty}\frac{a^{m}b^{n}}{m!\,n!}\mathrm{H}_{m,\,n}(\zeta,\ \zeta^{*})
\tag{4.140}
$$

所以

$$\langle\zeta \mid m, n\rangle=\frac{1}{\sqrt{m!n!}}\mathrm{H}_{m,n}(\zeta, \zeta^{*}) \tag{4.141}$$

由式(4.136)可见

$$\langle\zeta \mid \tau\rangle=\frac{\sqrt{(2j)!}}{(1+|\tau|^{2})^{j}}\sum_{l=0}^{2j}\frac{\tau^{2j-l}\mathrm{H}_{2j-l,l}(\zeta, \zeta^{*})}{l!(2j-l)!} \tag{4.142}$$

但我们并不满足于这个形式，而是希望能够进一步将其化简. 为此利用双变数厄米多项式的积分表达式(2.93)，可把式(4.142)改写为

$$\begin{aligned}\langle\zeta \mid \tau\rangle&=\frac{\sqrt{(2j)!}}{(1+|\tau|^{2})^{j}}\sum_{l=0}^{2j}(-1)^{l}\mathrm{e}^{\zeta\zeta^{*}}\int\frac{\mathrm{d}^{2}z}{\pi}\frac{(\tau z^{*})^{2j-l}z^{l}}{l!(2j-l)!}\\&\quad\exp(-|z|^{2}+\zeta z-\zeta^{*}z^{*})\\&=\frac{1}{(1+|\tau|^{2})^{j}\sqrt{(2j)!}}\mathrm{e}^{\zeta\zeta^{*}}\int\frac{\mathrm{d}^{2}z}{\pi}(\tau z^{*}-z)^{2j}\\&\quad\exp(-|z|^{2}+\zeta z-\zeta^{*}z^{*})\end{aligned} \tag{4.143}$$

为了积分式(4.143)，令

$$\begin{gathered}z-\tau z^{*}=(1-|\tau|^{2})z'\\z=z'+\tau z'^{*},\ z^{*}=z'^{*}+\tau^{*}z'\end{gathered} \tag{4.144}$$

从 $\mathrm{d}^{2}z\rightarrow\mathrm{d}^{2}z'$ 的雅可比行列式是

$$\mathrm{d}^{2}z=(1-|\tau|^{2})\mathrm{d}^{2}z' \tag{4.145}$$

再令 $s=\zeta-\tau^{*}\zeta^{*}$，对式(4.143)积分，得到

$$\begin{aligned}\langle\zeta \mid \tau\rangle=&\frac{1}{(1+|\tau|^{2})^{j}\sqrt{(2j)!}}\mathrm{e}^{\zeta\zeta^{*}}(1-|\tau|^{2})^{2j+1}\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)^{2j}\times\\&\int\frac{\mathrm{d}^{2}z'}{\pi}\exp\{-(1+|\tau|^{2})|z'|^{2}-\tau^{*}z'^{2}-\tau z'^{*2}+sz'-s^{*}z'^{*}\}\end{aligned} \tag{4.146}$$

再利用积分公式

$$\int \frac{d^2 z}{\pi} \exp\{\lambda \mid z \mid^2 + fz^2 + gz^{*2} + \xi z + \eta z^*\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 4fg}} \exp\left[\frac{-\lambda\xi\eta + \xi^2 g + \eta^2 f}{\lambda^2 - 4fg}\right] \tag{4.147}$$

得到

$$\langle \zeta \mid \tau \rangle$$

$$= \frac{e^{\zeta\zeta^*}(1-|\tau|^2)^{2j}}{(1+|\tau|^2)^j\sqrt{(2j)!}}\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)^{2j}\exp\left[\frac{-(1+|\tau|^2)ss^* - \tau^* s^{*2} - \tau s^2}{(1-|\tau|^2)^2}\right] \tag{4.148}$$

注意到单变数厄米多项式具有微商形式(2.18),并令

$$\frac{\sqrt{\tau}}{1-|\tau|^2}s + \frac{1+|\tau|^2}{1-|\tau|^2}\frac{s^*}{2\sqrt{\tau}} \equiv \chi \tag{4.149}$$

则式(4.148)简写为

$$\langle \zeta \mid \tau \rangle = \frac{\tau^j H_{2j}(\chi)}{(1+|\tau|^2)^j\sqrt{(2j)!}}\exp\left[\zeta\zeta^* - \frac{\tau^* s^{*2}}{(1-|\tau|^2)^2} + \left(\frac{1+|\tau|^2}{1-|\tau|^2}\frac{s^*}{2\sqrt{\tau}}\right)^2 - \chi^2\right] \tag{4.150}$$

注意到 $s = \zeta - \tau^* \zeta^*$,于是

$$(\zeta^* + \tau\zeta)/(2\sqrt{\tau}) = \chi \tag{4.151}$$

故式(4.150)中的指数函数的[　　]中的值恰为零,所以我们得到了一个较为简洁的表达式

$$\langle \zeta \mid \tau \rangle = \frac{\tau^j}{(1+|\tau|^2)^j\sqrt{(2j)!}} H_{2j}\left(\frac{\zeta^* + \tau\zeta}{2\sqrt{\tau}}\right) \tag{4.152}$$

式(4.152)说明原子相干态(在玻色子实现下)在纠缠态$\langle\zeta|$表

象下的波函数是一个阶为 $2j$ 的单变数厄米多项式，这是一个易记忆也较优美的结果．式(4.152)也可以被称为在 Schwinger 玻色实现下原子相干态的一个广义的 Bargmann 表示．

### 4.13.3 原子相干态的 Wigner 函数

作为式(4.152)的应用之一，下面求原子相干态的 Wigner 函数．利用 Wigner 算符的纠缠态表示式：

$$\Delta(\alpha)\Delta(\beta)=\int\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\pi^3}\|\gamma-\zeta\rangle\langle\gamma+\zeta\|\exp(\rho\zeta^*-\zeta\rho^*)=\Delta(\gamma,\rho) \tag{4.153}$$

$$\gamma=\alpha+\beta^*,\ \rho=\alpha-\beta^*,\ \beta=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2+\mathrm{i}p_2)$$

式中，$\|\zeta\rangle=\mathrm{e}^{-\frac{|\zeta|^2}{2}}|\zeta\rangle$．以下求

$$\begin{aligned}&\langle\tau|\Delta(\gamma,\rho)|\tau\rangle\\&=\langle\tau|\int\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\pi^3}\|\gamma-\zeta\rangle\langle\gamma+\zeta\|\exp(\rho\zeta^*-\zeta\rho^*)|\tau\rangle\\&=\frac{|\tau|^{2j}}{(2j)!(1+|\tau|^2)^{2j}}\int\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\pi^3}\mathrm{H}_{2j}^*\left[\frac{(\gamma-\zeta)^*+\tau(\gamma-\zeta)}{2\sqrt{\tau}}\right]\times\\&\quad\mathrm{H}_{2j}\left[\frac{(\gamma+\zeta)^*+\tau(\gamma+\zeta)}{2\sqrt{\tau}}\right]\times\\&\quad\exp\left(-\frac{|\gamma-\zeta|^2+|\gamma+\zeta|^2}{2}+\rho\zeta^*-\zeta\rho^*\right)\end{aligned} \tag{4.154}$$

进行积分变数变换 $\zeta\rightarrow\zeta'\equiv\dfrac{\zeta^*+\tau\zeta}{\sqrt{\tau}}$，其逆变换是 $\zeta=\sqrt{\tau^*}\dfrac{\zeta'^*-|\tau|\zeta'}{1-|\tau|^2}$，并令 $\gamma'\equiv\dfrac{\gamma^*+\tau\gamma}{\sqrt{\tau}}$，以及用

$$\mathrm{H}_n\left(\frac{x}{2}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \exp(tx-t^2)\bigg|_{t=0} \tag{4.155}$$

可把式(4.154)改写为

$$\begin{aligned}
&\frac{(2j)!(1+|\tau|^2)^{2j}}{|\tau|^{2j}}\mathrm{e}^{|\gamma|^2}\langle\tau\mid\Delta(\gamma,\rho)\mid\tau\rangle \\
&=\frac{|\tau|}{1-|\tau|^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2j}\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^{2j}\int\frac{\mathrm{d}^2\zeta'}{\pi^3}\exp\Big[t(\gamma'^*-\zeta'^*)+ \\
&t'(\gamma'+\zeta')-t^2-t'^2- \\
&\left|\sqrt{\tau^*}\,\frac{\zeta'^*-|\tau|\zeta'}{1-|\tau|^2}\right|^2+\rho\left(\sqrt{\tau}\,\frac{\zeta'-|\tau|\zeta'^*}{1-|\tau|^2}\right)- \\
&\left(\sqrt{\tau^*}\,\frac{\zeta'^*-|\tau|\zeta'}{1-|\tau|^2}\right)\rho^*\Big]\bigg|_{t=t'=0}
\end{aligned} \tag{4.156}$$

式中的积分为

$$\begin{aligned}
&\int\frac{\mathrm{d}^2\zeta'}{\pi^3}\exp\Big[\frac{-(1+|\tau|^2)|\zeta'|^2+|\tau|(\zeta'^{*2}+\zeta'^2)}{(1-|\tau|^2)^2}|\tau|+ \\
&\zeta'\left[t'+\frac{\sqrt{\tau}\rho}{1-|\tau|^2}+\frac{|\tau|\sqrt{\tau^*}\rho^*}{1-|\tau|^2}\right]+ \\
&\zeta'^*\left[-t-\frac{|\tau|\sqrt{\tau}\rho}{1-|\tau|^2}-\frac{\sqrt{\tau^*}\rho^*}{1-|\tau|^2}\right]\Big] \\
&=\frac{1-|\tau|^2}{\pi^2|\tau|}\exp\left[t^2+t'^2-\frac{1+|\tau|^2}{|\tau|}tt'+\frac{1}{|\tau|}(\omega t+\omega^* t')-|\rho|^2\right]
\end{aligned} \tag{4.157}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\omega=2|\tau|g-g^*(1+|\tau|^2)=\sqrt{\tau}(\tau^*\rho^*-\rho) \\
&g=\frac{|\tau|}{1-|\tau|^2}\,\frac{\rho^*+\tau\rho}{\sqrt{\tau}}
\end{aligned} \tag{4.158}$$

把式(4.157)代入到式(4.156),并用双变数厄米多项式的微商表

达式，可得 Wigner 函数为

$$
\begin{aligned}
&\langle\tau \mid \Delta(\gamma, \rho) \mid \tau\rangle \\
&= \frac{|\tau|^{2j}}{\pi^2(2j)!(1+|\tau|^2)^{2j}} e^{-|\gamma|^2-|\rho|^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2j}\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^{2j} \times \\
&\quad \exp\left[-\frac{1+|\tau|^2}{|\tau|}tt' + \frac{1}{|\tau|}(\omega t+\omega^* t') + t\gamma'^* + t'\gamma'\right]\Bigg|_{t=t'=0} \\
&= \frac{1}{\pi^2(2j)!} e^{-|\gamma|^2-|\rho|^2} H_{2j,2j}[\lambda(\rho'^* + \gamma'^*), \lambda(\rho'+\gamma')] \\
&= \frac{1}{\pi^2(2j)!} e^{-2(|\alpha|^2+|\beta|^2)} H_{2j,2j}\left[2\lambda\frac{\tau^*\alpha^*+\beta^*}{\sqrt{\tau^*}}, 2\lambda\frac{\tau\alpha+\beta}{\sqrt{\tau}}\right]
\end{aligned} \tag{4.159}
$$

式中

$$
\rho' = \frac{\tau\rho-\rho^*}{\sqrt{\tau}},\ \lambda^2 = \frac{|\tau|}{1+|\tau|^2},\ \gamma' \equiv \frac{\tau\gamma+\gamma^*}{\sqrt{\tau}} \tag{4.160}
$$

可见在玻色表示下的原子相干态的 Wigner 函数是一个双变数厄米多项式，其阶数为 $2j$.

### 4.13.4 原子相干态的 Wigner 函数的边缘分布

这里要用到纠缠形式的 Wigner 算符，读者可先参考第 7 章的有关知识，根据式(7.45)，可得

$$
\begin{aligned}
&\int d^2\rho W(\gamma, \rho) = \pi^{-1} \mid \langle\zeta\mid_{\zeta=\gamma} \mid \tau\rangle \mid^2, \\
&\int d^2\gamma W(\gamma, \rho) = \pi^{-1} \mid \langle\eta\mid_{\eta=\rho} \mid \tau\rangle \mid^2.
\end{aligned} \tag{4.161}
$$

用 $\gamma = \alpha + \beta^*$，$\rho = \alpha - \beta^*$，$\chi = \dfrac{(\zeta^* + \tau\zeta)}{2\sqrt{\tau}}$ 以及式(4.150)和式(4.161)，得到

$$\int d^2\rho W(\gamma, \rho) = \frac{1}{\pi^2 (2j)!}\int d^2\rho \exp[-(|\gamma|^2 + |\rho|^2)] \times$$

$$H_{2j,2j}\left[2\lambda \frac{\tau^*(\gamma^* + \rho^*) + \gamma - \rho}{\sqrt{\tau^*}}, 2\lambda \frac{\tau(\gamma+\rho) + \gamma^* - \rho^*}{\sqrt{\tau}}\right]$$

$$= \pi^{-1}\exp(-|\gamma|^2)\left|C(\tau, j)H_{2j}\left(\frac{\gamma^* + \tau\gamma}{2\sqrt{\tau}}\right)\right|^2 \tag{4.162}$$

式中

$$C(\tau, j) \equiv \frac{\tau^j}{(1+|\tau|^2)^j \sqrt{(2j)!}} \tag{4.163}$$

类似又可得

$$\int d^2\gamma W(\gamma, \rho) = \pi^{-1}\exp(-|\rho|^2)\left|C(\tau, j)H_{2j}\left(\frac{\tau^*\rho^* - \rho}{2\sqrt{\tau^*}}\right)\right|^2 \tag{4.164}$$

可见在 Schwinger 玻色表示下的原子相干态的 Wigner 函数的边缘分布分别是 $\gamma$ 空间与 $\rho$ 空间中的单模 $2j$ 阶厄米多项式. 式(4.162)与式(4.164)也可看作是新的积分公式.

又从原子相干态的内积

$$\langle\tau' \mid \tau\rangle = (1+|\tau|^2)^{-j}(1+|\tau'|^2)^{-j}(1+\tau'^*\tau)^{2j} \tag{4.165}$$

以及纠缠态 $|\zeta\rangle$ 的完备性关系和式(4.152),可以导出

$$\langle\tau' \mid \tau\rangle$$

$$= \int \frac{d^2\zeta}{\pi}\langle\tau' \mid \zeta\rangle\langle\zeta \mid \tau\rangle$$

$$= \frac{\tau'^{*j}\tau^j}{(2j)!(1+|\tau|^2)^j(1+|\tau'|^2)^j}\int \frac{d^2\zeta}{\pi} e^{-\zeta^*\zeta} H_{2j}^*\left(\frac{\zeta^* + \tau'\zeta}{2\sqrt{\tau'}}\right) H_{2j}\left(\frac{\zeta^* + \tau\zeta}{2\sqrt{\tau}}\right) \tag{4.166}$$

对照式(4.165)可见

$$\int \frac{d^2\zeta}{\pi} e^{-\zeta^*\zeta} H_{2j}^*\left(\frac{\zeta^*+\tau'\zeta}{2\sqrt{\tau'}}\right) H_{2j}\left(\frac{\zeta^*+\tau\zeta}{2\sqrt{\tau}}\right)$$

$$=(2j)!(1+\tau'^*\tau)^{2j}(\tau'^*\tau)^{-j} \tag{4.167}$$

可以从式(4.167)看出原子相干态的广义 Bargmann 空间中的基函数的正交关系.特别当在式(4.167)中取 $\tau'=\tau$ 时,有

$$\frac{|\tau|^{2j}}{(2j)!(1+|\tau|^2)^{2j}}\int \frac{d^2\zeta}{\pi} e^{-|\zeta|^2}\left|H_{2j}\left(\frac{\zeta^*+\tau\zeta}{2\sqrt{\tau}}\right)\right|^2=1 \tag{4.168}$$

## 4.14 拉曼相干效应中的原子相干态

拉曼相干效应,即发生在拉曼活性介质之间的单色光会在光学振动模式和辐射场模式之间引起参数耦合,即所谓的斯托克斯效应.(在布里渊散射的情况下,有一个类似的耦合,只是振动发生在声音,而不是光的频率.)设描述拉曼相干效应的哈密顿量近似为

$$H=\omega_1 a^\dagger a+\omega_2 b^\dagger b-\mathrm{i}\lambda(a^\dagger b-ab^\dagger) \tag{4.169}$$

它是两个耦合谐振子的模式.

利用 $a^\dagger|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle$, $a|n\rangle=\sqrt{n}|n-1\rangle$ 和式(4.136),求解原子相干态满足定态薛定谔方程

$$H|\tau\rangle=E|\tau\rangle \tag{4.170}$$

即

$$H|\tau\rangle$$
$$=\frac{1}{(1+|\tau|^2)^j}\sum_{l=0}^{2j}\sqrt{\frac{(2j)!}{l!(2j-l)!}}[\omega_1(2j-l)+\omega_2 l]\tau^{2j-l}\times$$

$$|2j-l\rangle\otimes|l\rangle-\mathrm{i}\lambda\frac{1}{(1+|\tau|^2)^j}\sum_{l=0}^{2j}\sqrt{\frac{(2j)!}{(l-1)!(2j-l+1)!}}\times$$

$$(2j-l+1)\tau^{2j-l}\ |2j-l+1\rangle\otimes|l-1\rangle+\mathrm{i}\lambda\frac{1}{(1+|\tau|^2)^j}\times$$

$$\sum_{l=0}^{2j-1}\sqrt{\frac{(2j)!}{(l+1)!(2j-l-1)!}}(l+1)\tau^{2j-l}\ |2j-l-1\rangle\otimes|l+1\rangle \tag{4.171}$$

在式(4.171)的右边令 $l\pm1\rightarrow l$,得到

$$H|\tau\rangle=\frac{1}{(1+|\tau|^2)^j}\sum_{l=0}^{2j}\sqrt{\frac{(2j)!}{l!(2j-l)!}}\tau^{2j-l}\Big\{[\omega_1(2j-l)+\omega_2 l]-$$

$$\mathrm{i}\lambda(2j-l)\frac{1}{\tau}+\mathrm{i}\lambda\tau l\Big\}|2j-l\rangle\otimes|l\rangle$$

$$=\frac{1}{(1+|\tau|^2)^j}\sum_{l=0}^{2j}\sqrt{\frac{(2j)!}{l!(2j-l)!}}\tau^{2j-l}\Big\{2\left(\omega_1-\mathrm{i}\frac{\lambda}{\tau}\right)j+$$

$$\left[(\omega_2-\omega_1)+\mathrm{i}\lambda\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)\right]l\Big\}|2j-l\rangle\otimes|l\rangle$$

$$=2\left(\omega_1-\mathrm{i}\frac{\lambda}{\tau}\right)j\ |\tau\rangle+\frac{1}{(1+|\tau|^2)^j}\sum_{l=0}^{2j}\sqrt{\frac{(2j)!}{l!(2j-l)!}}\tau^{2j-l}$$

$$\left[(\omega_2-\omega_1)+\mathrm{i}\lambda\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)\right]l\ |2j-l\rangle\otimes|l\rangle \tag{4.172}$$

当满足条件

$$\mathrm{i}\lambda\tau^2+\tau(\omega_2-\omega_1)+\mathrm{i}\lambda=0$$

$$\Rightarrow\tau_\pm=\frac{(\omega_2-\omega_1)\pm\sqrt{(\omega_2-\omega_1)^2+4\lambda^2}}{2\mathrm{i}\lambda} \tag{4.173}$$

式(4.136)中的 $|\tau_\pm\rangle$ 就是 $H$ 的本征态

$$E=2\left(\omega_1-\mathrm{i}\frac{\lambda}{\tau}\right)j=j[(\omega_2-\omega_1)\pm\sqrt{(\omega_2-\omega_1)^2+4\lambda^2}] \tag{4.174}$$

所以 $H$ 的本征态和自旋值 $j$ 相联系，特别地，当 $\omega_2 = \omega_1 = \omega$ 时，给出 $\tau_{\pm} = \mp i$，$E_{\pm} = 2j(\omega \pm \lambda)$. 具体来看几个例子.

当 $j = \frac{1}{2}$ 时，式(4.136)给出

$$|\tau_{\pm}\rangle_{j=1/2} = \frac{1}{(1+|\tau_{\pm}|^2)^{1/2}}(\tau_{\pm}|1\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle) \tag{4.175}$$

$\omega_1 = \omega_2$ 时就推出

$$|i_{\pm}\rangle_{j=1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mp i|1\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle) \tag{4.176}$$

当然 $H|i_{+}\rangle_{j=1/2} = \frac{\omega+\lambda}{\sqrt{2}}(-i|1, 0\rangle + |0, 1\rangle)$ 是可以验证的.

当 $j = 1$ 时，得到

$$\begin{aligned}|\tau_{\pm}\rangle_{j=1} &= \frac{1}{1+|\tau_{\pm}|^2}\sum_{l=0}^{2}\sqrt{\frac{(2)!}{l!(2-l)!}}\tau_{\pm}^{2-l}|2-l\rangle \otimes |l\rangle \\ &= \frac{1}{1+|\tau_{\pm}|^2}(\tau_{\pm}^2|2\rangle \otimes |0\rangle + \sqrt{2}\tau_{\pm}|1\rangle \otimes 1 + |0\rangle \otimes |2\rangle)\end{aligned} \tag{4.177}$$

$\omega_1 = \omega_2$ 时就推出

$$|i_{\pm}\rangle_{j=1} = \frac{1}{2}(-|2\rangle \otimes |0\rangle \mp i\sqrt{2}|1\rangle \otimes |1\rangle + |0\rangle \otimes |2\rangle) \tag{4.178}$$

$j = 3/2$ 则给出

$$\begin{aligned}|\tau_{\pm}\rangle_{j=3/2} = \frac{1}{1+|\tau|^{3/2}}(\tau_{\pm}^3|3\rangle \otimes |0\rangle + \sqrt{3}\tau_{\pm}^2|2\rangle \otimes |1\rangle + \\ \sqrt{3}\tau_{\pm}|1\rangle \otimes |2\rangle + |0\rangle \otimes |3\rangle)\end{aligned} \tag{4.179}$$

$\omega_1 = \omega_2$ 时就推出

$$|\,i_\pm\rangle_{j=3/2}=\frac{1}{2^{3/2}}(\pm i\,|\,3\rangle\otimes|\,0\rangle-\sqrt{3}\,|\,2\rangle\otimes|\,1\rangle\mp$$

$$i\sqrt{3}\,|\,1\rangle\otimes|\,2\rangle+|\,0\rangle\otimes|\,3\rangle)\qquad(4.180)$$

如果 $j=2$，得到

$$\begin{aligned}|\,\tau_\pm\rangle_{j=2}&=\frac{1}{(1+|\,\tau\,|^2)^2}\sum_{l=0}^{4}\sqrt{\frac{4!}{l!(4-l)!}}\tau_\pm^{4-l}\,|\,4-l\rangle\otimes|\,l\rangle\\&=\frac{1}{(1+|\,\tau_\pm\,|^2)^2}(\tau_\pm^4\,|\,4\rangle\otimes|\,0\rangle+2\tau_\pm^3\,|\,3\rangle\otimes|\,1\rangle+\\&\quad\sqrt{6}\tau_\pm^2\,|\,2\rangle\otimes|\,2\rangle+2\tau_\pm\,|\,1\rangle\otimes|\,3\rangle+|\,0\rangle\otimes|\,4\rangle)\end{aligned}\qquad(4.181)$$

$\omega_1=\omega_2$ 时就推出

$$|\,\tau_\pm\rangle_{j=2}=\frac{1}{4}(|\,4\rangle\otimes|\,0\rangle\pm2i\,|\,3\rangle\otimes|\,1\rangle-\sqrt{6}\,|\,2\rangle\otimes|\,2\rangle\mp$$

$$2i\,|\,1\rangle\otimes|\,3\rangle+|\,0\rangle\otimes|\,4\rangle)\qquad(4.182)$$

可见 $H$ 的本征态是可以用 Fock 态表达出的.

在原子相干态表象，$H$ 是对角化的，那么就可以利用它的能量本征态来直接计算它的配分函数了，即

$$\begin{aligned}Z_+(\beta)&=\mathrm{Tr}_+(\mathrm{e}^{-\beta H})=\sum_{2j=0}^{\infty}{}_j\langle\tau_+|\,\mathrm{e}^{-\beta H}\,|\,\tau_+\rangle_j\\&=\sum_{2j=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta A 2j}=\frac{1}{\mathrm{e}^\eta-1}\bigg|_{\eta=-\beta A}=\frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta A}-1}\end{aligned}\qquad(4.183)$$

和

$$Z_-(\beta)=\mathrm{Tr}_-(\mathrm{e}^{-\beta H})=\sum_{2j=0}^{\infty}{}_j\langle\tau_-\,|\mathrm{e}^{-\beta H}\,|\tau_-\rangle_j=\frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta A}-1}\qquad(4.184)$$

其中

$$A = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + 4\lambda^2}}{2} \tag{4.185}$$

$$B = \frac{\omega_1 + \omega_2 - \sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + 4\lambda^2}}{2} \tag{4.186}$$

满足 $H \mid \tau_+ \rangle = 2Aj \mid \tau_+ \rangle$，$H \mid \tau_- \rangle = 2Bj \mid \tau_- \rangle$.

那么总的分区函数为

$$Z(\beta) = Z_+(\beta) Z_-(\beta) = \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta A} - 1} \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta B} - 1} \tag{4.187}$$

系统的能量为

$$\begin{aligned}
\langle H \rangle_{\mathrm{e}} &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(\beta) \\
&= -\frac{\partial}{\partial \beta}\left[\ln \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta A} - 1} + \ln \frac{1}{\mathrm{e}^{-\beta B} - 1}\right] \\
&= \frac{A}{\mathrm{e}^{\beta A} - 1} + \frac{B}{\mathrm{e}^{\beta B} - 1}
\end{aligned} \tag{4.188}$$

## 4.15 建立以哈密顿量本征态的 Wigner 函数为本征函数的方程[13]

根据 Weyl 对应公式(4.7)，求得算符 $\Delta(p_1, q_1)\Delta(p_2, q_2)$ 的经典 Weyl 对应函数是

$$\begin{aligned}
&2\pi \mathrm{Tr}[\Delta(p_1, q_1)\Delta(p_2, q_2)\Delta(p, q)] \\
&= \frac{1}{\pi^2} \exp\{-2\mathrm{i}[p_1(q_2 - q) + p_2(q - q_1) + p(q_1 - q_2)]\}
\end{aligned} \tag{4.189}$$

所以 $\Delta(p_1, q_1)\Delta(p_2, q_2)$ 的 Weyl 编序形式即为

$$\Delta(p_1, q_1)\Delta(p_2, q_2)$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\iint \mathrm{d}q\mathrm{d}p\Delta(p, q)\exp\{-2\mathrm{i}[p_1(q_2-q)+p_2(q-q_1)+p(q_1-q_2)]\}$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\vdots\exp\{-2\mathrm{i}[p_1(q_2-Q)+p_2(Q-q_1)+P(q_1-q_2)]\}\vdots \tag{4.190}$$

对于算符 $F$ 和 $G$,记它们的 Weyl 编序形式分别是

$$F = \vdots\hat{f}\vdots,\ G = \vdots\hat{g}\vdots \tag{4.191}$$

那么 $FG$ 的 Weyl 对应就可以求得为

$$FG = \frac{1}{\pi^2}\iiiint \mathrm{d}p_1\mathrm{d}q_1\mathrm{d}p_2\mathrm{d}q_2 f(p_1, q_1)g(p_2, q_2)$$

$$\vdots\exp\{2\mathrm{i}[q_1(p_2-P)+p_1(Q-q_2)+q_2P-Qp_2]\}\vdots$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\iiiint \mathrm{d}p_1\mathrm{d}q_1\mathrm{d}p_2\mathrm{d}q_2\vdots e^{2\mathrm{i}[q_1(p_2-P)+p_1(Q-q_2)+q_2P-Qp_2]/\hbar}\times$$

$$f\left(P+\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\overleftarrow{\partial}_{q_2}, Q-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\overleftarrow{\partial}_{p_2}\right)g(p_2, q_2)\vdots$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\iiiint \mathrm{d}p_1\mathrm{d}q_1\mathrm{d}p_2\mathrm{d}q_2\vdots e^{2\mathrm{i}[q_1(p_2-P)+p_1(Q-q_2)+q_2P-Qp_2]/\hbar}\times$$

$$f\left(P-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\overrightarrow{\partial}_{q_2}, Q+\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\overrightarrow{\partial}_{p_2}\right)g(p_2, q_2)\vdots$$

$$=\iint \mathrm{d}p_2\mathrm{d}q_2\vdots\delta(Q-q_2)\delta(p_2-P)\times$$

$$f\left(P-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\overrightarrow{\partial}_{q_2}, Q+\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\overrightarrow{\partial}_{p_2}\right)g(p_2, q_2)\vdots$$

$$=\vdots f\left(P-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\overrightarrow{\partial}_Q, Q+\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\overrightarrow{\partial}_P\right)g(P, Q)\vdots \tag{4.192}$$

记 $FG$ 的经典 Weyl 对应函数为 $f\bigstar g$,则

$$f\bigstar g = f\left(p - \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\overrightarrow{\partial_q},\ q + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\overleftarrow{\partial_p}\right)g(p,\ q) \tag{4.193}$$

考虑特殊情况，即当 $F = H$（$H$ 是哈密顿量），$G = |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|$，$|\Psi_n\rangle$是 $H$ 的本征态，$H|\Psi_n\rangle = E_n|\Psi_n\rangle$，记$|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|$的经典对应函数是 $\psi \sim \mathrm{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi|\Delta) = \langle\psi|\Delta|\psi\rangle$，即$|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n| \to \psi$(Wigner 函数)，则由方程(4.192)就有

$$\begin{aligned}
& H|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n| \\
= & E_n|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n| \\
= & \frac{1}{\pi^2}\iiiint \mathrm{d}q_1\mathrm{d}p_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}p_2 h(p_1,\ q_1)\psi(p_2,\ q_2) \colon\times \\
& \exp\{-2\mathrm{i}[p_1(q_2 - Q) + p_2(Q - q_1) + P(q_1 - q_2)]\}\colon \\
= & E_n\iint \mathrm{d}q\mathrm{d}p\psi(p,\ q)\Delta(p,\ q)
\end{aligned} \tag{4.194}$$

记 $H|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|$的经典 Weyl 对应函数为 $h\bigstar\psi$，则由式(4.193)和式(4.194)得到

$$h\bigstar\psi = E_n\psi = h\left(p - \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\overrightarrow{\partial_q},\ q + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\overleftarrow{\partial_p}\right)\psi(p,\ q) \tag{4.195}$$

这样就建立了一个以哈密顿量本征态的 Wigner 函数为本征函数的方程. 举个例子，当 $H$ 是谐振子哈密顿量时，其经典对应 $h \to \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$，那么由方程(4.195)就有

$$\left[\left(q + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\overleftarrow{\partial_p}\right)^2 + \left(p - \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\overrightarrow{\partial_q}\right)^2\right]\psi(p,\ q) = 2E\psi(p,\ q) \tag{4.196}$$

而我们已知谐振子的本征态为粒子数态，其 Wigner 函数为拉盖尔多项式.

# 参考文献


[1] Fan Hongyi, Yuan Hongchun, Jian Nianquan. Deriving new operator identities by alternately using normally, antinormally, and Weyl ordered integration technique [J]. Sci. Chin., 2010,53:1626 - 1630.

[2] Scully M O, Zubairy M S. Quamtum optics [M]. Cambridge: Cambridge University Press, England, 1997.

[3] Fan Hongyi. Applications of Weyl Ordered Two-Mode Wigner Operator for Quantum Mechanical Entangled System [J]. Commun. Theor. Phys., 2004,41:205 - 208; Fan Hongyi. Weyl-ordered Polynomials Studied by virtue of the IWWOP technique [J]. Mod. Phys. Lett. A, 2000,15:2297 - 2303; Fan Hongyi, Fan Yue. Weyl Ordering for Entangled State Representation [J]. Intern. J. Mod. Phys. A, 2002,17:701 - 708; Fan Hongyi. Weyl ordering quantum mechanical operators by virtue of the IWOP technique [J]. J. Phys. A, 1992,25: 3443 - 3447.

[4] Fan Hongyi, Wang Jisuo. On the Weyl Ordering Invariance under General n-mode Similar Transformations [J]. Mod. Phys. Lett. A, 2005,20:1525 - 1532; Fan Hongyi, Fan Yue. Derivation of squeezed states via Weyl ordering approach [J]. Mod. Phys. Lett. A, 1997, 12: 2325; Fan Hongyi. Newton-Leibniz integration for ket - bra operators in quantum mechanics (IV) — Integrations within Weyl ordered product of operators and their applications [J]. Ann. Phys., 2008,323:500.

[5] Metha C L. Diagonal Coherent-State Representation of Quantum Operators [J]. Phys. Rev. Lett., 1967,18:752 - 754.

[6] Fan Hongyi. Weyl-ordered Polynomials Studied by virtue of the IWWOP Technique [J]. Mod. Phys. Lett. A, 2000,15:2297 - 2303.

[7] Yu Zhisong, Fan Hongyi. A deriving of the generalized coherent state representation by virtue of Weyl operator ordering method [J]. Chinese Journal of Phycics, 2010,48(2):179 - 185.

[8] Husimi K. Some Formal Properties of the Density Matrix [J]. Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 1940,22:264 - 314.

[9] 于文健,王继锁,范洪义. 用 Weyl - Wigner 对应求证相干态的一个重要性质[J]. 量子光学学报,2009,15(4):291 - 293.

[10] Fan Hongyi, Xu Xinglei, Li Hongqi. Recapitulating Quantum Phase Space Representation by Virtue of Normally Ordered Gaussian Form of

Wigner Operator [J]. Commun. Theor. Phys. , 2010,53:261 - 264.
[11] Xu Xinglei, Li Hongqi, Fan Hongyi. Relationship between wave function and corresponding Wigner function studied inentangled state representation [J]. Commun. Theor. Phys. , 2008,49(5):1159 - 1162.
[12] Fan Hongyi, Chen Junhua. Atomic coherent states studied by virtue of the EPR entangled state and their Wigner functions [J]. Euro. Phys. J. D, 2003,23:437 - 442.
[13] Fan Hongyi. Weyl orering technique for converting energy-eigenstates equation to the equation for Wigner function of eigenstates [J]. to be published.

# 第5章　数学统计正态分布和密度矩阵的正规排序形式的对应

量子力学中态的描述是基于几率的假定,而数学上的随机现象也具有概率统计的特性,于是这促使我们寻找这样一种理论,该理论能够把概率统计学与量子力学相空间准几率分布函数联系起来,这就是本章的目的.

有序算符内的积分技术可以用来研究许多纯态的完备关系,例如坐标本征态、动量本征态和相干态,研究发现其完备关系都可化成在正规乘积内的高斯积分形式,基于以上思想,借助有序算符内的积分技术(IWOP 技术)和相似变换下 Weyl 编序的序不变性,讨论单模压缩-平移的混沌光场的密度算符,发现其正规乘积形式正好与统计学中的二维正态分布形式相对应,这就有利于讨论其边缘分布和计算力学量的方差,并给出其合理的物理解释.本章还将给出广义 Wigner 算符和具有纠缠性质的两模混态的密度矩阵,把它们纳入正规乘积内的二维正态分布形式的算符,并且分析其边缘分布和方差.通过这种方法,可以把量子统计中的密度算符理论与数理统计学联系起来,这是丰富和发展量子相空间分布函数理论的一个新思路.

## 5.1　量子统计中的相空间分布函数

在经典统计力学中,粒子的运动常用相空间的分布函数 $f_c(q, p)$来描述.相应于粒子运动的任一力学量函数 $A_c(q, p)$的平均值可以通过下式进行计算

$$\langle A\rangle_{\mathrm{C}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}q\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}pA_{\mathrm{C}}(q,\ p)f_{\mathrm{C}}(q,\ p),\tag{5.1}$$

其中下标字母C代表经典情形.然而,在量子力学中微观粒子的运动状态是用波函数或密度算符来刻画的.建立量子相空间分布函数理论的目的就在于试图构造一个类似于经典分布函数 $f_{\mathrm{C}}(q,\ p)$ 的量子分布函数 $f(q,\ p)$,使得量子平均值的计算由式(5.1)变成

$$\begin{aligned}\langle\hat{A}\rangle&=\mathrm{tr}[\hat{A}(\hat{q},\ \hat{p})\,\hat{\rho}(\hat{q},\ \hat{p})],\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}q\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}pA(q,\ p)f(q,\ p),\end{aligned}\tag{5.2}$$

而又不违反关于坐标和动量之间的测不准关系.对于同一密度算符其量子相空间中的分布函数不是唯一的,它与经典函数如何量子化的规则密切相关,或者说每一种对应规则伴随一种分布函数,这是由于每一种量子化的对应规则是通过以下变换来完成的,

$$F(P,\ Q)=\iint\mathrm{d}p\mathrm{d}q\Delta_{g}(q,\ p)f(q,\ p)\tag{5.3}$$

其积分核 $\Delta_g(q,\ p)$ 是一个算符,它必须是完备的,

$$\iint\mathrm{d}p\mathrm{d}q\Delta_{g}(q,\ p)=1\tag{5.4}$$

所以不同的量子对应也可看作是算符 $F(P,\ Q)$ 在不同的完备基 $\Delta_g(q,\ p)$ 上的展开.对于同一个 $|\psi\rangle$ 态,不同的 $\Delta_g(q,\ p)$ 对应不同的分布函数 $\langle\psi|\Delta_g(q,\ p)|\psi\rangle\equiv F_g(q,\ p)$.

Cohen[1]曾经认为 $F_g(q,\ p)$ 的一般形式是

$$\begin{aligned}F_{g}(q,\ p)=\frac{1}{4\pi^{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\alpha\int_{\infty-}^{+\infty}\mathrm{d}\beta\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}q'\left\langle q'+\frac{\beta}{2}\mid\hat{\rho}\mid q'-\frac{\beta}{2}\right\rangle\times\\g(\alpha,\ \beta)\exp[\mathrm{i}\alpha(q'-q)-\mathrm{i}\beta p]\end{aligned}\tag{5.5}$$

我们可以从式(5.5)抽象出一个算符

$$\Delta_g(q, p)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\beta\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}q'\left|q'-\frac{\beta}{2}\right\rangle\left\langle q'+\frac{\beta}{2}\right|\times$$
$$\exp[\mathrm{i}\alpha(q'-q)-\mathrm{i}\beta p]g(\alpha, \beta) \tag{5.6}$$

再利用 $\langle q \mid P=\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\langle q|$ 和 $|q'\rangle\langle q'|=\delta(q'-Q)$，就得到

$$\Delta_g(q, p)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\exp[-\mathrm{i}\alpha(q-Q)-\mathrm{i}\beta(p-P)]g(\alpha, \beta) \tag{5.7}$$

另外，就分布函数 $F_g(q, p)$ 本身而言，还有一个不符合几率分布的性质，即非正定性. 这就使人们在对其解释上，只能看作是一种准概率分布函数(quasi-distribution function). 进一步分析可以发现，这种准几率行为与量子场的非经典性有关.

## 5.2 概率统计中有关正态分布知识的回顾

在众多的相空间分布中，密度矩阵的 Wigner 函数是使用最为广泛的一种，这是因为它的两个边缘分布分别导致了在坐标空间和动量空间中的测量概率. Wigner 函数的这些性质与概率统计中的正态分布的性质极其相似. 在本节中，我们将借助有序算符内的积分技术(IWOP 技术)，探讨广义 Wigner 算符和 $p-q$ 相空间中二维正态分布.

### 5.2.1 正态分布

无论在理论研究还是在实际应用中，正态分布是概率论中最重要的一种分布，它的变数(例如动量)可以跑遍负无穷至正无穷，大量随机变量，例如：各种测量的误差，人体的身高、体重、农作物的收获量，产品的尺寸、直径、长度、宽度、高度等都近似地服从正态分布. 另外，由于正态分布具有许多良好的性质，所以许多其他分布都用正态分布来近似表示.

以下分别给出概率统计中关于正态分布、二维连续型随机变量和二维正态分布的定义.

**1）正态分布**

如果连续型随机变量 $X$ 的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ (-\infty<x<+\infty) \tag{5.8}$$

式中 $\mu$、$\sigma$ 为常数，且 $\sigma>0$，则称 $X$ 服从参数为 $\mu$、$\sigma$ 的正态分布.

**2）二维连续型随机变量**

设二维随机变量$(X, Y)$的联合分布函数为 $F(x, y)$，如果存在非负函数 $f(x, y)$，使得对于任意实数 $x$，$y$ 有

$$F(x, y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u, \nu)\mathrm{d}u\mathrm{d}\nu \tag{5.9}$$

则称$(X, Y)$为二维连续型随机变量，称函数 $f(x, y)$为$(X, Y)$的（联合）概率密度或（联合）分布密度.

按定义，概率密度具有以下性质：

(1) $f(x, y)\geqslant 0$. (5.10)

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x, y)\mathrm{d}u\mathrm{d}\nu=1$. (5.11)

(3) 如果 $f(x, y)$在点$(x, y)$连续，则有

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\partial y}=f(x, y). \tag{5.12}$$

(4) 设 $D$ 是 $xOy$ 平面上的一个平面区域，二维随机变量$(X, Y)$落在 $D$ 内的概率为

$$P\{(x, y)\in D\}=\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{5.13}$$

**3）二维正态分布**

如果二维随机变量$(X, Y)$的概率密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]} \tag{5.14}$$

式中 $\mu_1$, $\mu_2$, $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\rho$ 均为参数,且 $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $-1 < \rho < 1$,则称 $(X, Y)$ 服从参数为 $\mu_1$, $\mu_2$, $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\rho$ 的二维正态分布.

### 5.2.2 边缘分布

二维随机变量 $(X, Y)$ 作为一个整体,具有联合分布函数 $F(x, y)$,而 $X$, $Y$ 又都是一维随机变量,自然都有各自的分布函数,分别记为 $F_X(x)$, $F_Y(y)$,依次称它们为二维随机变量 $(X, Y)$ 关于 $X$ 和 $Y$ 的边缘分布函数.

这里只介绍二维连续型随机变量的边缘分布.

设 $(X, Y)$ 为二维连续型随机变量,其概率密度为 $f(x, y)$, $X$ 的边缘分布函数为

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u, \tag{5.15}$$

从而知 $X$ 是一个连续型随机变量,且其概率密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y. \tag{5.16}$$

同样,$Y$ 也是一个连续型随机变量,且其概率密度为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x. \tag{5.17}$$

并分别称 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 为 $(X, Y)$ 关于 $X$ 和关于 $Y$ 的边缘概率密度或边缘分布密度.

在 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 的连续点处,有

$$\frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x} = f_X(x), \quad \frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y} = f_Y(y). \tag{5.18}$$

当对于一切 $x$、$y$，有

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y), \tag{5.19}$$

则称随机变量 $X$ 和 $Y$ 是相互独立的.

### 5.2.3 数学期望和方差

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其分布密度为 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，则 $X$ 的数学期望为

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu. \tag{5.20}$$

随机变量的数学期望值反映了随机变量的平均值大小，它是随机变量的重要数字特征. 在许多实际问题中，不但要知道随机变量的数学期望，还要知道随机变量取值的波动程度，即它所取的值与它的数学期望的偏离程度. 研究随机变量与平均值的偏离程度是十分必要的，通常用方差来度量随机变量与其数学期望的偏离程度，其定义如下：

设 $X$ 是一随机变量，如果 $E[X - E(X)]^2$ 存在，则称 $E[X - E(X)]^2$ 为 $X$ 的方差，记为 $D(X)$ 或 $\mathrm{var}(X)$，即

$$D(X) = E[X - E(X)]^2. \tag{5.21}$$

下面介绍二维连续型随机变量的方差.

设已给二维连续型随机变量 $(X, Y)$，如果方差 $D(X)$，$D(Y)$ 存在，则称 $(D(X), D(Y))$ 为二维连续型随机变量 $(X, Y)$ 的方差，且

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f_X(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x - E(X)]^2 f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad (5.22)$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}[y - E(Y)]^2 f_Y(y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[y - E(Y)]^2 f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad (5.23)$$

### 5.2.4 协方差与相关系数

二维随机变量$(X, Y)$的数学期望$(E(X), E(Y))$和方差$(D(X), D(Y))$只反映了两个分量各自的性质，但对二维随机变量，除了关心$X$，$Y$各自的情况外，还希望知道它们之间的联系，这仅靠数学期望和方差是办不到的，于是引入了协方差，其定义如下：

设$(X, Y)$为二维随机变量，若$E\{[x-E(X)][y-E(Y)]\}$存在，则称它为随机变量$X$与$Y$的协方差，记为$\mathrm{cov}(X, Y)$或$\sigma_{XY}$，即

$$\mathrm{cov}(X, Y) = E\{[x - E(X)][y - E(Y)]\} \quad (5.24)$$

而当$D(X)$，$D(Y)$大于零时，

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} \quad (5.25)$$

称为随机变量$X$与$Y$的相关系数或标准协方差.

## 5.3 广义 Wigner 算符及其正规乘积编序形式

由 Cohen 给出的广义相空间分布函数的定义为式(5.5)，其中当$g(\alpha, \beta) = 1$，就给出一般的 Wigner 算符和 Wigner 函数.

Weyl 对应规则是将经典相空间中的函数$h(p, q)$量子化为算符$H(P, Q)$的一种方案，即式(4.9)，积分核$\Delta(q, p)$是单模

Wigner 算符，在第 4 章已经给出过详细的讨论. 反变换为式(4.7).

对一般的 $g(\alpha, \beta)$，可以得到广义 Wigner 算符的表达式

$$\Delta_g(q, p) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}u\mathrm{d}\nu \exp\{\mathrm{i}(q-Q)u + \mathrm{i}(p-P)\nu\} g(u, \nu) \tag{5.26}$$

广义 Weyl 对应为

$$H(P, Q) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p\mathrm{d}q h(p, q)\Delta_g(p, q) \tag{5.27}$$

当我们取

$$g(u, \nu) = \sigma_1\sigma_2 \exp\left[\frac{1}{4}(u^2+\nu^2) - \frac{1}{2}(u^2\sigma_1^2 + \nu^2\sigma_2^2) - \tau u\nu\sigma_1\sigma_2\right], \quad (\tau < 1) \tag{5.28}$$

利用 IWOP 技术可以算出 $\Delta_g(q, p)$ 的正规乘积形式

$$\begin{aligned}\Delta_g(q, p) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_1\sigma_2 \mathrm{d}u\mathrm{d}\nu}{4\pi^2} :\exp\Big\{\mathrm{i}(q-Q)u + \mathrm{i}(p-P)\nu - \\ &\quad \frac{1}{2}(u^2\sigma_1^2 + \nu^2\sigma_2^2) - \tau u\nu\sigma_1\sigma_2\Big\}: \\ &= \frac{\sigma_1\sigma_2}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}u\mathrm{d}\nu :\exp\Big\{-\frac{1}{2}(u, \nu)\Upsilon\begin{pmatrix}u\\ \nu\end{pmatrix} + \\ &\quad \mathrm{i}(q-Q, p-P)\begin{pmatrix}u\\ \nu\end{pmatrix}\Big\}: \\ &= \frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{\det \Upsilon}} :\exp\Big\{-\frac{1}{2}(q-Q, p-P)\Upsilon^{-1}\begin{pmatrix}q-Q\\ p-P\end{pmatrix}\Big\}:\end{aligned} \tag{5.29}$$

其中

$$\Upsilon=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \tau\sigma_1\sigma_2\\ \tau\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix},\ \Upsilon^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sigma_1^2(1-\tau^2)} & \dfrac{-\tau}{(1-\tau^2)\sigma_1\sigma_2}\\ \dfrac{-\tau}{(1-\tau^2)\sigma_1\sigma_2} & \dfrac{1}{\sigma_2^2(1-\tau^2)}\end{pmatrix}$$

$$\det\Upsilon=\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\tau^2) \tag{5.30}$$

所以式(5.29)可以写成

$$\Delta_g(q,\ p)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\tau^2}}:\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\tau^2)}\left[\frac{(q-Q)^2}{\sigma_1^2}-2\tau\frac{(q-Q)(p-P)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(p-P)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}: \tag{5.31}$$

将式(5.31)与式(5.14)作对比,发现其形式与概率统计中的二维正态分布非常相似,因此可以说,$\Delta_g(q,\ p)$应该是一类相空间正规乘积形式的二维正态分布算符.

现在定义

$$\Lambda=1-\tau^2,\ \sigma_p=\frac{1}{\sigma_1^2},\ \sigma_q=\frac{1}{\sigma_2^2},\ \sigma_{q,\ p}=\frac{\tau}{\sigma_1\sigma_2} \tag{5.32}$$

则式(5.31)化为

$$\Delta_g(q,\ p)=(2\pi\sqrt{\Lambda})^{-1}:\exp\left\{-\frac{1}{2\Lambda}\left[\sigma_p(q-Q)^2-2\sigma_{q,\ p}(q-Q)(p-P)+\sigma_q(p-P)^2\right]\right\}: \tag{5.33}$$

这就是正规乘积形式的广义 Wigner 算符,它对应于相空间的某种二维正态分布算符. 注意:这里要求

$$\sigma_q\sigma_p-\sigma_{q,\ p}^2=\frac{1-\tau^2}{(\sigma_1\sigma_2)^2}=\frac{\Lambda}{(\sigma_1\sigma_2)^2}>0 \tag{5.34}$$

式(5.34)是广义 Wigner 算符 $\Delta_g(q, p)$具有二维正态分布性质的充分必要条件,注意由于 $\Upsilon$ 是一个对称矩阵,因此能分解成 $\Upsilon = \tilde{A}A$, $A$ 为一个 2×2 的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{5.35}$$

所以有

$$\begin{aligned} &\Delta(q, p; \sigma_1, \sigma_2, \tau) \\ &= \frac{1}{2\pi \det A} : \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(q-Q, p-P)A^{-1}(A^{\mathrm{T}})^{-1}\begin{pmatrix} q-Q \\ p-P \end{pmatrix}\right]\right\} :. \end{aligned} \tag{5.36}$$

如果 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$,则式(5.36)正好又回到了一般的 Wigner 算符

$$\Delta(q, p) = \frac{1}{\pi} : \exp\left\{-\left[(q-Q, p-P)\begin{pmatrix} q-Q \\ p-P \end{pmatrix}\right]\right\} :, \tag{5.37}$$

也就是说,在相空间中的变换$(q-Q, p-P) \to (q-Q, p-P)A^{-1}$使得一般的 Wigner 算符变为二维正态分布的广义 Wigner 算符.

## 5.4 广义 Wigner 算符的边缘分布

所谓的边缘分布定义如下:设有二维随机变量$(X, Y)$,作为$(X, Y)$的分量 $X$、$Y$,被单独考虑其中一个时,相当于另一个可任意取值,把这样得到的随机变量 $X$ 或 $Y$ 的分布称为$(X, Y)$的边缘分布.

利用式(5.33)和 IWOP 技术,对广义 Wigner 算符在整个相

空间求积分

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sigma_1\sigma_2}\iint_{-\infty}^{\infty}\Delta_g(q,\ p)\mathrm{d}p\mathrm{d}q \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{\Lambda}}\iint_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p\mathrm{d}q : \exp\left\{-\frac{1}{2\Lambda}[\sigma_p(q-Q)^2 - \right. \\
&\quad \left. 2\sigma_{q,\ p}(q-Q)(p-P)+\sigma_q(p-P)^2]\right\} \\
&= (\sqrt{2\pi\sigma_p})^{-1}\sqrt{\frac{2\pi\Lambda\sigma_p}{\sigma_q\sigma_p-\sigma_{q,\ p}^2}} = 1
\end{aligned} \tag{5.38}
$$

因此，可以看出 $\Delta_g(q,\ p)$ 在相空间中是完备的，这与一般 Wigner 算符满足完备性的性质一样. 类比于概率统计中二维正态分布的期望值和方差的计算，借助 IWOP 技术，可以进一步计算动量和坐标的期望值，其结果如下：

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\int\mathrm{d}p : p\mathrm{e}^{-\frac{(p-P)^2}{2\sigma_2^2}} := : P := P \tag{5.39}
$$

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\int\mathrm{d}q : q\mathrm{e}^{-\frac{(q-Q)^2}{2\sigma_1^2}} := : Q := Q \tag{5.40}
$$

方差为

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\int\mathrm{d}p : (p-P)^2\mathrm{e}^{-\frac{(p-P)^2}{2\sigma_2^2}} := \sigma_2^2 \tag{5.41}
$$

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\int\mathrm{d}q : (q-Q)^2\mathrm{e}^{-\frac{(q-Q)^2}{2\sigma_1^2}} := \sigma_1^2 \tag{5.42}
$$

再计算其协方差，可得

$$
\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} : (q-Q)(p-P)\Delta_g(q,\ p) : \mathrm{d}q\mathrm{d}p = \tau\sigma_q\sigma_p \tag{5.43}
$$

由以上可以看出 $\tau$ 代表用 $Q$ 测量和用 $P$ 测量之间的关联. 当 $\tau=0$

时，$\Delta_g(q, p)$则化为

$$\Delta_g(q, p)\mid_{\tau=0} \to \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} : \exp\left[-\frac{(q-Q)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(p-P)^2}{2\sigma_2^2}\right]: \tag{5.44}$$

然后计算 $\Delta_g(q, p)$的边缘分布得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_g(q, p)\mathrm{d}q = (\sqrt{2\pi\sigma_p})^{-1} : \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_p}(p-P)^2\right]: \tag{5.45}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_g(q, p)\mathrm{d}p = (\sqrt{2\pi\sigma_q})^{-1} : \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_q}(q-Q)^2\right]: \tag{5.46}$$

对比一般 Wigner 算符的边缘分布和概率统计中的二维正态分布的相关性质，可见广义 Wigner 算符的边缘分布同样有与它们相似的性质，这也是为何命名 $\Delta_g(q, p)$为广义 Wigner 算符的原因. 以上两式还表明二维正态分布的边缘分布仍是正态分布，且与 $\tau$ 无关.

## 5.5 二维正态分布函数对应的密度算符

由式(5.33)可知，相干态 $|z\rangle = \exp[-|z|^2/2 + za^\dagger]|0\rangle$ 的广义 Wigner 函数为

$$\begin{aligned}\langle z|\Delta_g(q, p)|z\rangle &= (2\pi\sqrt{\Lambda})^{-1}\langle z| : \exp\left\{-\frac{1}{2\Lambda}[\sigma_p(q-Q)^2 - \right.\\ &\qquad \left. 2\sigma_{q,p}(q-Q)(p-P) + \sigma_q(p-P)^2]\right\} : |z\rangle \\ &= (2\pi\sqrt{\Lambda})^{-1}\exp\left\{-\frac{1}{2\Lambda}[\sigma_p(q-\bar{q})^2 - \right.\\ &\qquad \left. 2\sigma_{q,p}(q-\bar{q})(p-\bar{p}) + \sigma_q(p-\bar{p})^2]\right\}\end{aligned} \tag{5.47}$$

式中

$$\overline{q}=\frac{z+z^*}{\sqrt{2}},\ \overline{p}=\frac{z-z^*}{\sqrt{2}\mathrm{i}} \tag{5.48}$$

定义 $f(q-\overline{q},\ p-\overline{p})$为相干态的广义 Wigner 函数

$$f(q-\overline{q},\ p-\overline{p})=\langle z\mid\Delta_g(q,\ p)\mid z\rangle \tag{5.49}$$

当把下式视为某个密度算符的一般的 Wigner 分布函数时

$$f(q,\ p)=\langle 0\mid\Delta_g(q,\ p)\mid 0\rangle \tag{5.50}$$

则通过 Weyl 对应规则式(4.4)可以求出 $\rho$ 来. 根据式(5.50)和式(4.4),并用式(5.47),可以看出密度算符的矩阵元是与 $f(q,\ p)$ ($\overline{q}=0,\ \overline{p}=0$) 以如下方式相联系

$$\begin{aligned}\langle q\mid\rho\mid q'\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{q'+q}{2},\ p\right)\exp[\mathrm{i}p(q'-q)]\mathrm{d}p\\ &= (2\pi\sqrt{\Lambda})^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2\Lambda}\left[\sigma_p\left(\frac{q'+q}{2}\right)^2-\right.\right.\\ &\qquad \left.\left.2\sigma_{q,\,p}(q'+q)p+\sigma_q p^2\right]+\mathrm{i}p(q'-q)\right\}\mathrm{d}p\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_q}}\exp\{-[Aq'^2+Bq'q+A^*q^2]\}\end{aligned} \tag{5.51}$$

式(5.51)中已令

$$A=-\frac{1}{2\sigma_q}\left(\frac{1}{4}+\Lambda-\mathrm{i}\sigma_{q,\,p}\right),\ B=\frac{1}{2\sigma_q}\left(\frac{1}{2}-2\Lambda\right) \tag{5.52}$$

考虑特殊情况,当 $q'=q$ 时

$$\langle q\mid\rho\mid q\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_q}}\exp\left\{-\frac{q^2}{2\sigma_q}\right\} \tag{5.53}$$

结果与式(5.46)相吻合. 对式(5.51)左乘 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}q\mid q\rangle$ 和右乘

$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}q'\langle q'|$，并利用真空态的投影算符表达式

$$|0\rangle\langle 0| = :\mathrm{e}^{-a^\dagger a}: \tag{5.54}$$

和 IWOP 技术，可以得密度矩阵的显式形式

$$\begin{aligned}
\rho &= \int\mathrm{d}q\int\mathrm{d}q'\ |q\rangle\langle q|\rho|q'\rangle\langle q'| \\
&= \frac{1}{\pi\sqrt{2\sigma_q}}\iint\mathrm{d}q\mathrm{d}q'\exp\left[-\frac{q^2}{2}+\sqrt{2}qa^\dagger-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\right]|0\rangle\times \\
&\quad \exp(Aq'^2-Bq'q+A^*q^2)\langle 0|\exp\left[-\frac{q'^2}{2}+\sqrt{2}q'a-\frac{a^2}{2}\right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\sigma_q L}}:\exp\left[\left(-\frac{1}{2}+\frac{1-2A}{L}\right)a^{\dagger 2}+\left(\frac{2B}{L}-1\right)a^\dagger a+\right. \\
&\quad \left.\left(-\frac{1}{2}+\frac{1-2A^*}{L}\right)a^2\right]:
\end{aligned} \tag{5.55}$$

可以看出式(5.55)是个混态的密度算符，其中

$$L = |1-2A|^2-B^2 \tag{5.56}$$

如果令

$$K = -\frac{1}{2}+\frac{1-2A}{L} \tag{5.57}$$

并利用算符恒等式(2.41)，则式(5.55)化为

$$\rho = \sqrt{\frac{2}{\sigma_q L}}\mathrm{e}^{Ka^{\dagger 2}}\exp\left[a^\dagger a\ln\left(\frac{2B}{L}\right)\right]\mathrm{e}^{K^*a^2} \tag{5.58}$$

由表达式(5.55)我们猜测 $\rho$ 是相干压缩态的密度矩阵. 通过比较式(5.55)和式(5.58)，可以得出结论：对于分布函数式(5.50)，它用广义 Wigner 算符对应的是纯真空态，而用一般 Wigner 算符对应的则是混态.

## 5.6 一类单模混态的二维正态分布

有序算符内的积分技术可以用来研究许多纯态的完备关系，例如坐标本征态、动量本征态和相干态，我们看到其完备关系都可化成正规乘积内的高斯形式，于是会想，形式稍微复杂一点的具有正规乘积编序的高斯算符所代表的物理意义[8]是什么呢？例如，像形为

$$\frac{1}{\tau_1\tau_2}:\exp\left[-\frac{(x-Q)^2}{2\tau_1^2}-\frac{(y-P)^2}{2\tau_2^2}\right]: \tag{5.59}$$

的高斯算符代表的会不会是量子光学理论中的某种混态的密度矩阵呢？在这一节，借助相似变换在 Weyl 编序下的序不变性，我们来探讨这一类正规乘积编序的高斯算符的物理意义.

### 5.6.1 物理意义的探讨

首先，考虑算符恒等式(2.41)的 Weyl 编序，由式(4.58)可得

$$\begin{aligned} e^{\lambda a^\dagger a} &= 2\int\frac{d^2\beta}{\pi}\langle-\beta|:\exp[(e^\lambda-1)a^\dagger a]:\times \\ &\quad |\beta\rangle \mathop{:}\limits^{:}\exp[2(\beta^* a-\beta a^\dagger+a^\dagger a)]\mathop{:}\limits^{:} \\ &= \frac{2}{e^\lambda+1}\mathop{:}\limits^{:}\exp\left[\frac{e^\lambda-1}{e^\lambda+1}(P^2+Q^2)\right]\mathop{:}\limits^{:} \end{aligned} \tag{5.60}$$

又由

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}[(1-e^\lambda)e^{\lambda a^\dagger a}] \\ &= (1-e^\lambda)\int\frac{d^2z}{\pi}\langle z|:\exp[(e^\lambda-1)a^\dagger a]:|z\rangle \\ &= (1-e^\lambda)\int\frac{d^2z}{\pi}e^{(e^\lambda-1)|z|^2} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{5.61}$$

可知 $(1-e^{\lambda})e^{\lambda a^{\dagger}a}\equiv\rho$ 是混沌光场的密度算符，利用平移算符 $D(\alpha)$ 和压缩算符 $S(r)$

$$D(\alpha)=\exp(\alpha a^{\dagger}-\alpha^{*}a),\ \alpha=\frac{x+\mathrm{i}y}{\sqrt{2}} \tag{5.62}$$

$$S(r)=\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}(QP+PQ)\ln r\right] \tag{5.63}$$

的性质

$$D(\alpha)QD^{-1}(\alpha)=Q-x$$

$$D(\alpha)PD^{-1}(\alpha)=P-y$$

$$SPS^{-1}=e^{r}P,\ SQS^{-1}=e^{-r}Q \tag{5.64}$$

将平移算符 $D(\alpha)$ 和压缩算符 $S(r)$ 及其逆算符分别作用于式(5.60)的左边和右边，可以得出

$$\begin{aligned}\rho_s&=(1-e^{\lambda})D(\alpha)S(r)e^{\lambda a^{\dagger}a}S^{-1}(r)D^{-1}(\alpha)\\&=\frac{2(1-e^{\lambda})}{e^{\lambda}+1}\vdots\exp\left\{\frac{e^{\lambda}-1}{e^{\lambda}+1}[e^{2r}(P-y)^2+e^{-2r}(Q-x)^2]\right\}\vdots\end{aligned} \tag{5.65}$$

在式(5.65)的计算中用到了 Weyl 编序在相似变换下的序不变性，根据 Weyl 量子化规则式(4.31)和 Wigner 算符的 Weyl 编序式(4.28)可以得出 $\rho_s$ 对应的经典函数为

$$\frac{2(1-e^{\lambda})}{e^{\lambda}+1}\exp\left\{\frac{e^{\lambda}-1}{e^{\lambda}+1}[e^{2r}(p-y)^2+e^{-2r}(q-x)^2]\right\} \tag{5.66}$$

对于哈密顿量为 $H=\omega\hbar a^{\dagger}a$ 的热场，其密度矩阵是 $e^{-\beta H}$，其中 $\beta=\frac{1}{kT}$，$k$ 是玻尔兹曼常数，如果令

$$\lambda=-\frac{\omega\hbar}{kT} \tag{5.67}$$

则由玻色统计给出平均光子数 $n$

$$n = \frac{1}{e^{-\lambda} - 1} \tag{5.68}$$

将式(5.68)和式(5.66)代入式(4.31),并利用 Wigner 算符的正规乘积形式(4.12),可以得到

$$\rho_s = \frac{1}{\tau_1 \tau_2} : \exp\left[-\frac{(x-Q)^2}{2\tau_1^2} - \frac{(y-P)^2}{2\tau_2^2}\right]: \tag{5.69}$$

式(5.69)中已令

$$(2n+1)e^{2r} + 1 = 2\tau_1^2,\ (2n+1)e^{-2r} + 1 = 2\tau_2^2 \tag{5.70}$$

因此,可以看出正规乘积形式的高斯算符式(5.59)代表热混合态(混沌光场)的密度矩阵,这就是其物理意义.

### 5.6.2 $\rho_s$ 的反正规编序形式

利用密度矩阵的反正规展开公式

$$\rho = \int \frac{d^2\beta}{\pi} ⋮ \langle -\beta | \rho | \beta \rangle \exp(|\beta|^2 + \beta^* a - \beta a^\dagger + a^\dagger a) ⋮ \tag{5.71}$$

可以得到 $\rho_s$ 的反正规编序形式(在式(5.69)中取 $x=y=0$ 后,简写为 $\rho_s = 2\sqrt{fg} : \exp[-fQ^2 - gP^2] :$)

$$\begin{aligned}\rho_s &= 2\sqrt{fg}\int \frac{d^2\beta}{\pi} ⋮ \exp\Big[-|\beta|^2 - \frac{f(\beta-\beta^*)^2}{2} + \\ &\quad \frac{g(\beta+\beta^*)^2}{2} + \beta^* a - \beta a^\dagger + a^\dagger a\Big] ⋮ \\ &= \frac{2\sqrt{fg}}{\sqrt{D}} ⋮ \exp\left[-a^\dagger a(1-f-g)/D - \frac{(f-g)}{2D}(a^{\dagger 2} + a^2) + a^\dagger a\right] ⋮\end{aligned} \tag{5.72}$$

其中

$$D = (2f - 1)(2g - 1) \tag{5.73}$$

于是就得到了 $\rho_s$ 的 $P$ 表示.

### 5.6.3 $\rho_s$ 的边缘分布和方差

利用有序算符内的积分技术(IWOP),从式(5.69)计算 $\rho_s$ 的边缘分布

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}} \rho_s = \frac{1}{\tau_2} : \exp\left[-\frac{(y-P)^2}{2\tau_2^2}\right]: \tag{5.74}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}} \rho_s = \frac{1}{\tau_1} : \exp\left[-\frac{(x-Q)^2}{2\tau_1^2}\right]: \tag{5.75}$$

可以看出:式(5.74)和式(5.75)右边都是正态分布形式,还可以很容易地计算出

$$\frac{1}{\tau_1\tau_2}\iint \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{2\pi} : \exp\left[-\frac{(x-Q)^2}{2\tau_1^2} - \frac{(y-P)^2}{2\tau_2^2}\right] := 1 \tag{5.76}$$

式(5.76)也隐含着 $\mathrm{Tr}\rho_s = 1$,对其用相干态表象求迹可以验证这一点,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\rho_s &= \int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} \langle z \mid \rho_s \mid z \rangle \\ &= \frac{1}{\tau_1\tau_2}\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} \exp\left\{-\frac{(x/\sqrt{2} - \mathrm{Re}\, z)^2}{\tau_1^2} - \frac{(y/\sqrt{2} - \mathrm{Im}\, z)^2}{\tau_2^2}\right\} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{5.77}$$

由正态分布知识,可以很快地计算以下方差

$$\begin{aligned} &\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}\,\tau_1} : (x-Q)^2 \exp\left[-\frac{(x-Q)^2}{2\tau_1^2}\right]: \\ &= \tau_1^2 = \frac{1}{2}[(2n+1)\mathrm{e}^{2r} + 1], \end{aligned} \tag{5.78}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}\tau_2} :(y-P)^2 \exp\left[-\frac{(y-P)^2}{2\tau_2^2}\right]:$$

$$= \tau_2^2 = \frac{1}{2}[(2n+1)\mathrm{e}^{-2r}+1] \tag{5.79}$$

注意,其中 $n$ 是依赖于温度的,这可以从式(5.68)看出,因此,方差的取值也是依赖于温度的.

## 5.7 一类具有纠缠性质的两模混态的二维正态分布

基于上一节单模混态呈现正规乘积内的二维正态分布[2]的思想,本节将上节内容推广到具有纠缠性质的两模混态[3].借助有序算符内的积分技术(IWOP)和相似变换下 Weyl 变换的序不变性[4],我们把一类具有纠缠性质的两模混态的密度矩阵化成正规乘积内的二维正态分布形式,并讨论其边缘分布情况和方差.从而可以将数学统计中二维正态分布的性质应用到量子统计的密度算符中,丰富和发展量子相空间分布函数理论.

两模平移压缩热场态的表达式为

$$\rho_2 = (1-\mathrm{e}^{\sigma})^2 D_1(\alpha) D_2(\beta) S_2(\lambda) \mathrm{e}^{\sigma(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2)} S_2^{-1}(\lambda) D_1^{-1}(\alpha) D_2^{-1}(\beta) \tag{5.80}$$

其中 $D_2(\beta)$ 也为平移算符

$$D_2(\beta) = \exp(\beta a_2^\dagger - \beta^* a_2),\ \beta = \frac{x_2 + \mathrm{i}y_2}{\sqrt{2}} \tag{5.81}$$

$S_2(\lambda)$ 为两模压缩算符[5,6]

$$S_2(\lambda) = \exp[\lambda(a_1^\dagger a_2^\dagger - a_1 a_2)] \tag{5.82}$$

值得注意的是 $(1-\mathrm{e}^{\sigma})\mathrm{e}^{\sigma(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2)}$ 本身就是一个密度算符.因为 $S_2(\lambda)$ 又是个纠缠算符(两模压缩态也是纠缠态),所以称 $\rho_2$ 为具有纠缠性质的两模混态.

为了得到 $\rho_2$ 的正规乘积形式，先求其 Weyl 编序形式，由以下变换

$$
\begin{aligned}
S_2(\lambda)Q_1S_2^{-1}(\lambda) &= Q_1\cosh\lambda - Q_2\sinh\lambda \\
S_2(\lambda)P_1S_2^{-1}(\lambda) &= P_1\cosh\lambda + P_2\sinh\lambda \\
S_2(\lambda)Q_2S_2^{-1}(\lambda) &= Q_2\cosh\lambda - Q_1\sinh\lambda \\
S_2(\lambda)P_2S_2^{-1}(\lambda) &= P_2\cosh\lambda + P_1\sinh\lambda
\end{aligned} \tag{5.83}
$$

可见

$$
S_2(\lambda)(Q_1+Q_2)S_2^{-1}(\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda}(Q_1+Q_2) \tag{5.84}
$$

$$
S_2(\lambda)(P_1+P_2)S_2^{-1}(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda}(P_1+P_2) \tag{5.85}
$$

由算符的 Weyl 编序公式(4.58)可以得到 $\mathrm{e}^{\sigma(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2)}$ 的 Weyl 编序形式

$$
\mathrm{e}^{\sigma(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2)} = \left(\frac{2}{\mathrm{e}^\sigma+1}\right)^2 \vdots\exp\left\{\frac{\mathrm{e}^\sigma-1}{\mathrm{e}^\sigma+1}(P_1^2+P_2^2+Q_1^2+Q_2^2)\right\}\vdots \tag{5.86}
$$

根据相似变换下 Weyl 编序的序不变性和式(5.83)～式(5.85)，可以得出

$$
\begin{aligned}
&S_2(\lambda)\mathrm{e}^{\sigma(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2)}S_2^{-1}(\lambda) \\
&= \frac{4}{(\mathrm{e}^\sigma+1)^2}\vdots\exp\left\{\frac{\mathrm{e}^\sigma-1}{\mathrm{e}^\sigma+1}[(P_1\cosh\lambda+P_2\sinh\lambda)^2+\right. \\
&\quad (P_2\cosh\lambda+P_1\sinh\lambda)^2+(Q_1\cosh\lambda-Q_2\sinh\lambda)^2+ \\
&\quad \left.(Q_2\cosh\lambda-Q_1\sinh\lambda)^2]\right\}\vdots \\
&= \frac{4}{(\mathrm{e}^\sigma+1)^2}\vdots\exp\{A(P_1^2+P_2^2+Q_1^2+Q_2^2)+2B(P_1P_2-Q_1Q_2)\}\vdots
\end{aligned} \tag{5.87}
$$

在式(5.87)中

$$
A = \tanh\frac{\sigma}{2}\cosh 2\lambda,\ B = \tanh\frac{\sigma}{2}\sinh 2\lambda \tag{5.88}
$$

再利用平移算符的以下性质

$$\begin{aligned} D_1(\alpha)Q_1D_1^{-1}(\alpha) &= Q_1 - x_1 \\ D_1(\alpha)P_1D_1^{-1}(\alpha) &= P_1 - y_1 \\ D_2(\beta)Q_2D_2^{-1}(\beta) &= Q_2 - x_2 \\ D_2(\beta)P_2D_2^{-1}(\beta) &= P_2 - y_2 \end{aligned} \tag{5.89}$$

可以导出

$$\begin{aligned} \rho_2 &= (1-\mathrm{e}^{\sigma})^2 D_1(\alpha)D_2(\beta)S_2(\lambda)\mathrm{e}^{\sigma(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2)}S_2^{-1}(\lambda)D_1^{-1}(\alpha)D_2^{-1}(\beta) \\ &= 4\tanh^2\frac{\sigma}{2}D_1(\alpha)D_2(\beta)\,\vdots\exp[A(P_1^2+P_2^2+Q_1^2+Q_2^2)+ \\ &\quad 2B(P_1P_2-Q_1Q_2)]\vdots\,D_2^{-1}(\beta)D_1^{-1}(\alpha) \\ &= 4\tanh^2\frac{\sigma}{2}\vdots\exp\{A[(P_1-y_1)^2+(P_2-y_2)^2+(Q_1-x_1)^2+ \\ &\quad (Q_2-x_2)^2]+2B[(P_1-y_1)(P_2-y_2)-(Q_1-x_1)(Q_2-x_2)]\}\vdots \end{aligned} \tag{5.90}$$

这是密度算符 $\rho_2$ 的 Weyl 编序形式.

另一方面,再由 Wigner 算符的 Weyl 编序式(4.28)和 Weyl 量子化规则式(4.31),可知密度算符 $\rho_2$ 的经典 Weyl 对应为

$$\begin{aligned} &W(p_1, q_1; p_2, q_2) \\ &= 4\tanh^2\frac{\sigma}{2}\exp\{A[(p_1-y_1)^2+(p_2-y_2)^2+(q_1-x_1)^2+ \\ &\quad (q_2-x_2)^2]+2B[(p_1-y_1)(p_2-y_2)-(q_1-x_1)(q_2-x_2)]\} \end{aligned} \tag{5.91}$$

然后再利用两模 Wigner 算符的正规编序形式[8]

$$\begin{aligned} &\Delta(p_1, q_1; p_2, q_2) \\ &= \frac{1}{\pi^2}:\exp[-(q_1-Q_1)^2-(p_1-P_1)^2-(q_2-Q_2)^2-(p_2-P_2)^2]: \end{aligned} \tag{5.92}$$

和 Weyl 量子化规则(两模情形)

$$
\begin{aligned}
&\vdots H(P_1, Q_1; P_2, Q_2)\vdots \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p_1 \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}p_2 \mathrm{d}q_2 h(p_1, q_1; p_2, q_2) \Delta(p_1, q_1; p_2, q_2)
\end{aligned} \tag{5.93}
$$

可导出 $\rho_2$ 的正规乘积形式

$$
\begin{aligned}
\rho_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p_1 \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}p_2 \mathrm{d}q_2 W(p_1, q_1; p_2, q_2) \Delta(p_1, q_1; p_2, q_2) \\
&= \frac{4}{D} \tanh^2 \frac{\sigma}{2} : \exp\left\{ \frac{2B}{D} [(P_1 - y_1)(P_2 - y_2) - (Q_1 - x_1)(Q_2 - x_2)] + \right. \\
&\left. \frac{E}{D} [(P_1 - y_1)^2 + (P_2 - y_2)^2 + (Q_1 - x_1)^2 + (Q_2 - x_2)^2] \right\} :
\end{aligned} \tag{5.94}
$$

其中

$$
D = (1 - A)^2 - B^2 = 4 \frac{\cosh^2 \lambda - e^{2\sigma} \sinh^2 \lambda}{(e^\sigma + 1)^2} \tag{5.95}
$$

$$
E = A - A^2 + B^2 = -2 \frac{\cosh^2 \lambda - e^{2\sigma} \sinh^2 \lambda - e^\sigma}{(e^\sigma + 1)^2} \tag{5.96}
$$

从 $\rho_2$ 的正规乘积表达式(5.94)中,可以看到存在着耦合项 $(P_1 - y_1)(P_2 - y_2)$ 和 $(Q_1 - x_1)(Q_2 - x_2)$,这反映了 $\rho_2$ 的纠缠性.

现在用 $\rho_2$ 的 Weyl 编序形式(5.90)计算其边缘分布

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \rho_2 \\
&= 4\pi \tanh\left(\frac{-\sigma}{2}\right) \vdots \exp\{A[(P_1 - y_1)^2 + (P_2 - y_2)^2] + \\
&2B(P_1 - y_1)(P_2 - y_2)\} \vdots
\end{aligned} \tag{5.97}
$$

和

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\rho_2$$

$$= 4\pi\tanh\left(\frac{-\sigma}{2}\right) \vdots \exp\{A[(Q_1-x_1)^2+(Q_2-x_2)^2]-$$

$$2B(Q_1-x_1)(Q_2-x_2)\} \vdots \tag{5.98}$$

从式(5.97)和式(5.98)可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2}{2\pi}\frac{\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2}{2\pi}\rho_2 = 1 \tag{5.99}$$

这里需要指出的是式(5.97)～式(5.99)的可积条件是 $\mathrm{Re}\,A<0$，即从式(5.88)看出

$$\frac{\mathrm{e}^\sigma-1}{\mathrm{e}^\sigma+1}\cosh 2\lambda < 0 \to \frac{\mathrm{e}^\sigma-1}{\mathrm{e}^\sigma+1} < 0 \Rightarrow \sigma < 0 \tag{5.100}$$

鉴于以上分析，可以把量子统计中的密度算符类比于数学统计中的正态分布，大大简化了其方差的计算．下面分别计算$(P_1-y_1)^2$和$(Q_1-x_1)^2$ 在 $\rho_2$ 中的方差，可以得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2}{2\pi}\vdots(P_1-y_1)^2\rho_2\vdots$$

$$= \frac{\tanh\left(\frac{-\sigma}{2}\right)}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\vdots(P_1-y_1)^2\times$$

$$\exp\{A[(P_1-y_1)^2+(P_2-y_2)^2]+2B(P_1-y_1)(P_2-y_2)\}\vdots$$

$$= \frac{1}{2}\coth\left(\frac{-\sigma}{2}\right)\cosh 2\lambda \tag{5.101}$$

和

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2}{2\pi}\vdots(Q_1-x_1)^2\rho_2\vdots$$

$$= \frac{1}{2}\coth\left(\frac{-\sigma}{2}\right)\cosh 2\lambda \tag{5.102}$$

与式(5.78)和式(5.79)比较,可以看出其结果不同于单模混态的情况.

根据式(5.101)和式(5.102),进一步求以下方差

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2}{2\pi}:(P_1+P_2-y_1-y_2)^2\rho_2:$$

$$= \coth\left(\frac{-\sigma}{2}\right)\cosh 2\lambda + \frac{\tanh\left(\frac{-\sigma}{2}\right)}{\pi}\frac{\partial}{\partial B}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2:\exp\{A[(P_1-y_1)^2+$$

$$(P_2-y_2)^2]+2B(P_1-y_1)(P_2-y_2)\}:$$

$$= \coth\left(\frac{-\sigma}{2}\right)\cosh 2\lambda + \tanh\left(\frac{-\sigma}{2}\right)\frac{\partial}{\partial B}\sqrt{\frac{1}{A^2-B^2}}$$

$$= \mathrm{e}^{-2\lambda}\coth\left(\frac{-\sigma}{2}\right) \tag{5.103}$$

和

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2}{2\pi}:(Q_1+Q_2-x_1-x_2)^2\rho_2:$$

$$= \mathrm{e}^{2\lambda}\coth\left(\frac{-\sigma}{2}\right) \tag{5.104}$$

可见方差也是依赖于温度的.由式 $-\sigma=\omega\hbar/kT$ 可以得出结论:式(5.103)和式(5.104)的方差随着温度的升高而增大.

利用有序算符内的积分技术(IWOP)和 Weyl 变换在相似变换下的序不变性,我们给出了两模纠缠混态的正规乘积编序形式,发现它正是统计中的二维正态分布,这样我们把量子统计中的密度算符与数学统计联系起来,简化了方差的求解过程.

## 5.8 一类特殊的 $k$ -参数 Wigner 算符与其二维正态分布[9]

本节将把一般的 Wigner 算符 $\Delta(p, q)$推广到带 $k$ -参数的更广义的 Wigner 算符 $\Omega_k(p, q)$，这里 $k$ 是实数，不同的 $k$ 值将对应不同的广义 Wigner 算符，组成一个 Wigner 算符家族. 研究此 $k$ -参数 Wigner 算符的意义是，在量子化过程中，$k$ -参数描述的是正交测量量 $P$ 和 $Q$ 的相关性.

### 5.8.1 $k$ -参数 Wigner 算符

Wigner 算符在坐标表象可以被表示为式(4.8)，$\Delta(p, q)$还有另外一种形式

$$\Delta(p, q) = \frac{1}{4\pi^2}\int du\, d\nu e^{iu(q-Q)+i\nu(p-P)} \tag{5.105}$$

其中 $P$, $Q$ 是动量和坐标算符. 我们还知道 Wigner 算符是 Weyl 量子化规则的积分核，但是量子化方案并不是独一无二的，这里考虑 Wigner 算符的一种带参数的更广义的形式，即

$$\frac{1}{4\pi^2}\int du d\nu e^{iu(q-Q)+i\nu(p-P)+i\frac{k}{2}u\nu} \equiv \Omega_k(p, q) \tag{5.106}$$

$k$ 是实参数. 利用 $Q = \dfrac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}$，$P = \dfrac{a-a^\dagger}{i\sqrt{2}}$ 以及 IWOP 技术，可以对式(5.106)进行积分得到其正规乘积形式

$$\begin{aligned}\Omega_k(p, q) &= \frac{1}{4\pi^2}\int du\, d\nu : \exp\Big[-\frac{1}{4}(u^2+\nu^2) + iu(q-Q) + \\ &\quad i\nu(p-P) + i\frac{k}{2}u\nu\Big] : \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{1+k^2}} : \exp\Big\{-\frac{1}{1+k^2}[(q-Q)^2 +\end{aligned}$$

$$2\mathrm{i}k(q-Q)(p-P)+(p-P)^2]\Big\}\vdots \tag{5.107}$$

可以看到当 $k=0$ 时，$\Omega_k(p,q)$就退化到一般的 Wigner 算符，即

$$\Omega_{k=0}(p,q)=\frac{1}{\pi}\vdots\exp[-(p-P)^2-(q-Q)^2]\vdots \tag{5.108}$$

下面来讨论 $\Omega_k(p,q)$的相干态表象表示和坐标表象表示，令 $u=\frac{z+z^*}{\sqrt{2}}$，$\nu=\frac{z-z^*}{\mathrm{i}\sqrt{2}}$，$\alpha=\frac{q+\mathrm{i}p}{\sqrt{2}}$，则 $\Omega_k(p,q)\to\Omega_k(\alpha)$，即

$$\begin{aligned}\Omega_k(\alpha)&=\frac{1}{4\pi^2}\int\mathrm{d}^2z\exp\Big[\mathrm{i}z^*(a-\alpha)-\mathrm{i}z(a^\dagger-\alpha^*)+\\&\qquad\frac{k}{4}(z^2-z^{*2})\Big]\\&=\frac{1}{\pi\sqrt{1+k^2}}\mathrm{e}^{\frac{k}{1+k^2}(a^\dagger-\alpha^*)^2}\vdots\exp\Big[\frac{-2(a-\alpha)(a^\dagger-\alpha^*)}{1+k^2}\Big]\vdots\,\mathrm{e}^{\frac{-k}{1+k^2}(a-\alpha)^2}\end{aligned} \tag{5.109}$$

例如，相干态的广义 Wigner 函数为

$$\begin{aligned}&\langle z\mid\Omega_k(\alpha)\mid z\rangle\\&=\frac{1}{\pi\sqrt{1+k^2}}\exp\Big\{\frac{k[(z^*-\alpha^*)^2-(z-\alpha)^2]-2(z-\alpha)(z^*-\alpha^*)}{1+k^2}\Big\}\end{aligned} \tag{5.110}$$

下面给出广义 Wigner 函数 $\Omega_k(p,q)$的坐标表象表示，由式(5.106)得

$$\begin{aligned}\Omega_k(p,q)&=\frac{1}{4\pi^2}\int\mathrm{d}\nu\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\nu}\int\mathrm{d}u\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}u\left(q-Q+\frac{k+1}{2}\nu\right)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu P}\\&=\frac{1}{2\pi}\int\mathrm{d}\nu\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\nu}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\nu}{2}P}\delta\Big(q-Q+\frac{k+1}{2}\nu\Big)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\nu}{2}P}\\&=\frac{1}{2\pi}\int\mathrm{d}\nu\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\nu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k+1}{2}\nu P}\delta(q-Q)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k-1}{2}\nu P}\end{aligned} \tag{5.111}$$

再利用

$$\delta(q-Q)=|q\rangle\langle q|,\ P|q\rangle=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}|q\rangle \tag{5.112}$$

则有

$$\begin{aligned}\Omega_k(p,q)&=\frac{1}{2\pi}\int\mathrm{d}\nu\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k+1}{2}\nu P}\ |q\rangle\langle q|\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1-k}{2}\nu P}\\&=\frac{1}{2\pi}\int\mathrm{d}\nu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\nu}\left|q-\frac{k+1}{2}\nu\right\rangle\left\langle q+\frac{1-k}{2}\nu\right|\end{aligned} \tag{5.113}$$

很明显当 $k=0$ 时，式(5.113)即为式(4.8). 利用式(2.21)和 $|0\rangle\langle 0|=:\mathrm{e}^{-a^\dagger a}:$ 以及 IWOP 技术可以检验式(5.113)的正确性，

$$\begin{aligned}\Omega_k(p,q)&=\frac{\pi^{-1/2}}{2\pi}\int\mathrm{d}\nu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\nu}:\exp\Big[-q^2-\frac{1+k^2}{4}\nu^2+k\nu+\\&\quad\sqrt{2}\left(q-\frac{1+k}{2}\nu\right)a^\dagger-\frac{a^{\dagger 2}}{2}+\sqrt{2}\left(q+\frac{1-k}{2}\nu\right)a-\frac{a^2}{2}-a^\dagger a\Big]:\\&=\frac{1}{\pi\sqrt{1+k^2}}:\exp\Big\{-\frac{1}{1+k^2}\big[(q-Q)^2+\\&\quad 2\mathrm{i}k(q-Q)(p-P)+(p-P)^2\big]\Big\}:\end{aligned} \tag{5.114}$$

这与式(5.107)是一致的. 以上讨论可见参数 $k$ 起了二维正态分布中的相关系数的作用.

### 5.8.2 $k$-参数 Wigner 算符的统计意义

我们来讨论这种广义Wigner 算符的统计意义. 根据式(5.107)，$\Omega_k(p,q)$在 $p$ 方向与 $q$ 方向的边缘分布分别是

$$\begin{aligned}\int\mathrm{d}p\Omega_k(p,q)&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}:\exp\{-(p-P)^2\}:\\\int\mathrm{d}q\Omega_k(p,q)&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}:\exp\{-(q-Q)^2\}:\end{aligned} \tag{5.115}$$

接着可以得到完备性关系

$$\iint \mathrm{d}q\mathrm{d}p\Omega_k(p, q) = 1 \tag{5.116}$$

那么任意算符就可以用 $\Omega_k(p, q)$展开

$$H = \iint \mathrm{d}q\mathrm{d}p\Omega_k(p, q)h_k(p, q) \tag{5.117}$$

式(5.117)可以被看做一种广义的 Weyl 对应. 另一方面,高斯随机变量的二维正态分布函数的标准形式为

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\tau^2}} : \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\tau^2)}\left[\frac{(q-Q)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\tau(q-Q)(p-P)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(p-P)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\} : \tag{5.118}$$

其中 $\tau$ 是相关系数,$\tau\sigma_1\sigma_2$ 是协方差. 比较式(5.107)与式(5.118)发现,当 $\sigma_1 = \sigma_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\tau = -\mathrm{i}k$ 时,式(5.107)就是标准的二维正态分布,$-\mathrm{i}k$ 表示两个正交测量之间的相关程度. 那么根据式(5.43)有

$$\iint \mathrm{d}q\mathrm{d}p : (q-Q)(p-P)\Omega_k(p, q) : = -4\mathrm{i}k \tag{5.119}$$

就是协方差,可以看出在量子化过程中,$k$ -参数描述的是正交测量量 $P$ 和 $Q$ 的相关性.

根据式(5.106)及 Baker - Hausdorff 公式,考虑

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}[\Omega_k(p, q)\Omega_{-k}(p', q')] \\ &= \frac{1}{16\pi^4}\iint \mathrm{d}u\mathrm{d}\nu \mathrm{e}^{\mathrm{i}u(q-Q)+\mathrm{i}\nu(p-P)+\mathrm{i}\frac{k}{2}u\nu}\iint \mathrm{d}u'\mathrm{d}\nu' \mathrm{e}^{\mathrm{i}u'(q'-Q)+\mathrm{i}\nu'(p'-P)-\mathrm{i}\frac{k}{2}u'\nu'} \\ &= \frac{1}{2\pi}\delta(q-q')\delta(p-p')\end{aligned} \tag{5.120}$$

于是由式(5.117)和式(5.120)可得到式(5.117)的逆变换

$$h_k(p, q) = 2\pi\mathrm{Tr}[H\Omega_{-k}(p, q)] \tag{5.121}$$

本节结尾处我们给出(5.106)的 Weyl 编序式是

$$\Omega_k(p, q) = \frac{1}{\pi k} \vdots \exp\left[-\frac{2\mathrm{i}}{k}(q-Q)(p-P)\right] \vdots \quad (5.122)$$

当 $k=\pm 1$ 时，式(5.122) 就与下章中的式(6.14) 与式(6.18) 相联系，分别对应于 $P-Q$ 排序和 $Q-P$ 排序.

## 参考文献


[1] Cohen L. Generalized Phase-space distribution Functions [J]. J. Math. Phys., 1966,7:781.

[2] Fan Hongyi, Li Hongqi. Physics of a Kind of Normally Ordered Gaussian Operators in Quantum Optics [J]. Chin. Phys. Lett., 2007,24:3322 - 3324.

[3] Fan Hongyi, Wang Tongtong, Hu Liyun. Normally Ordered Bivariate-Normal-Distribution Forms of Two-Mode Mixed States with Entanglement Involved [J]. Chin. Phys. Lett., 2008,25(10):3539 - 3542.

[4] Fan Hongyi. Newton-Leibniz integration for ket-bra operators in quantum mechanics (IV) — Integrations within Weyl ordered product of operators and their applications [J]. Ann. Phys., 2008,323:500 - 526.

[5] Walls D F, Milburn G J. Quantum Optics [M]. Berlin: Springer, 1994; Orszag M. Quantum Optics [M]. Berlin: Springer, 2000; Wolfgang P S. Quantum Optics in Phase Space [M]. Berlin: Wiley, 2001; Mandel L, Wolf E. Optical Coherence and Quantum Optics [J]. Cambridge: Cambridge University, 1995.

[6] Buzek V. SU(1,1) Squeezing of SU(1,1) Generalized Coherent States [J]. J. Mod. Opt., 1990,37:303 - 316; Loudon R, Knight P L. Squeezed Light [J]. J. Mod. Opt., 1987,34:709 - 759; Dodonov V V. "Nonclassical" states in quantum optics: a "squeezed" review of the first 75 years [J]. J. Opt. B: Quant. Semiclass. Opt., 2002,4: R1 - R33.

[7] Klauder J R, Skagerstam B S. Coherent States [M]. Singapore World Scientific, 1985.

[8] Fan Hongyi, Fan Yue. New Bosonic Operator Ordering Identities Gained by the Entangled State Representation and Two-Variable Hermite Polynomials [J]. Commun. Theor. Phys., 2002, 38: 297-300.
[9] Wang Jisuo, Meng Xiangguo, Fan Hongyi. A family of generalized Wigner operators and its physical meaning as bivariate normal distribution [J]. Chin. Phys. Lett., 2011, 28(10): 104209.

# 第6章 相空间中的范氏变换及应用

Dirac 曾写道："变换理论日益增多的应用，是理论物理的精华."在数学物理领域，常用的是傅里叶变换和拉普拉斯变换、汉克尔变换，本章介绍范洪义提出的一种新的积分变换，简称为范氏变换.它有良好的变换特性，可用于研究 Weyl 编序和 $P-Q$ $(Q-P)$编序之间的关系，利用此变换，可以由 chirplet(啁啾)函数导出分数傅里叶变换积分核.

## 6.1 经典范氏变换的定义及其性质[1]

二维傅里叶变换对应于量子力学中坐标表象和动量表象之间的变换，它的形式如下：

$$\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{e}^{\mathrm{i}px+\mathrm{i}qy}f(x,\ y) \tag{6.1}$$

在 $p-q$ 相空间，范氏变换定义为

$$\iint \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p-x)(q-y)}f(p,\ q) \equiv F(x,\ y) \tag{6.2}$$

很明显，该变换是有别于方程(6.1)的一种新的变换.当 $f(p,q)=1$ 时，方程(6.2)变为

$$\iint \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p-x)(q-y)} = \int \mathrm{d}q\,\delta(q-y)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x(q-y)} = 1 \tag{6.3}$$

可以证明式(6.2)的逆变换为

$$\iint \frac{dx dy}{\pi} e^{-2i(p-x)(q-y)} F(x, y) = f(p, q) \tag{6.4}$$

事实上，将式(6.2)代入式(6.4)的左边可以看出

$$\iint \frac{dp' dq'}{\pi} f(p', q') \iint \frac{dx dy}{\pi} e^{2i[(p'-x)(q'-y)-(p-x)(q-y)]}$$

$$= \iint dp' dq' f(p', q') e^{2i(p'q'-pq)} \delta(p-p') \delta(q-q')$$

$$= f(p, q) \tag{6.5}$$

范氏变换的 Parseval - like 定理：

$$\iint \frac{dp dq}{\pi} \mid f(p, q) \mid^2$$

$$= \iint \frac{dx dy}{\pi} F(x, y) \iint \frac{dx' dy'}{\pi} F(x', y') e^{2i(x'y'-xy)} \iint \frac{dp dq}{\pi} e^{2i[(-y'p-x'q)+(py+xq)]}$$

$$= \iint \frac{dx dy}{\pi} F(x, y) \iint dx' dy' F(x', y') e^{2i(x'y'-xy)} \delta(x-x') \delta(y-y')$$

$$= \iint \frac{dx dy}{\pi} \mid F(x, y) \mid^2 \tag{6.6}$$

有趣的是

$$\frac{1}{\pi} \exp[2i(p-x)(q-y)]$$

$$= \int \frac{d\nu}{2\pi} \delta\left(q-y-\frac{\nu}{2}\right) \exp[i(p-x)\nu]$$

$$= \iint \frac{du d\nu}{4\pi^2} \exp\left[-\frac{iu\nu}{2} + i(q-y)u + i(p-x)\nu\right] \tag{6.7}$$

因此这个变换相当于

$$
\begin{aligned}
f(p,\ q) \rightarrow & \iint \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p-x)(q-y)} f(p,\ q) \\
&= \iint \mathrm{d}p\mathrm{d}q \int \frac{\mathrm{d}\nu}{2\pi} \delta\left(q - y - \frac{\nu}{2}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-x)\nu} f(p,\ q) \\
&= \iint \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{2\pi} f\left(p + x,\ y + \frac{q}{2}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}pq}
\end{aligned} \tag{6.8}
$$

## 6.2 范氏变换与经典函数量子化的 $P-Q(Q-P)$ 排序

$\mathrm{e}^{\lambda q+\sigma p}$ 的范氏变换为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\lambda q+\sigma p} \rightarrow & \iint \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p-x)(q-y)} \mathrm{e}^{\lambda q+\sigma p} \\
&= \mathrm{e}^{2\mathrm{i}xy} \int \mathrm{d}q\, \delta\left(q - y - \frac{\mathrm{i}\sigma}{2}\right) \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}q(x+\mathrm{i}\lambda/2)} \\
&= \mathrm{e}^{2\mathrm{i}xy}\, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(y+\mathrm{i}\sigma/2)(x+\mathrm{i}\lambda/2)} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\sigma/2+\sigma x+\lambda y}
\end{aligned} \tag{6.9}
$$

亦可求得 $\mathrm{e}^{\lambda q+\sigma p}$ 的范氏逆变换

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\lambda q+\sigma p} \rightarrow & \iint \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(p-x)(q-y)} \mathrm{e}^{\lambda q+\sigma p} \\
&= \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}xy}\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(y-\mathrm{i}\sigma/2)(x-\mathrm{i}\lambda/2)} \\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\sigma/2+\sigma x+\lambda y}
\end{aligned} \tag{6.10}
$$

引入量子力学坐标算符 $Q$ 和动量算符 $P$，$[P,\ Q]=-\mathrm{i}$，$\hbar=1$，那么对照式(6.9)和式(6.10)有

$$
\mathrm{e}^{\lambda Q}\mathrm{e}^{\sigma P} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\sigma/2+\sigma Q+\lambda P} \tag{6.11}
$$

$$
\mathrm{e}^{\lambda Q}\mathrm{e}^{\sigma P} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\sigma/2+\sigma Q+\lambda P} \tag{6.12}
$$

其中用到了 Baker - Hausdorff 公式. 观察式(6.9)～式(6.12)，很

自然地会想到 $Q-P$ 排序和 $P-Q$ 排序分别对应于变换式(6.2)和它的逆变换式(6.4). 下面将给出具体说明. 前面证明过,

$$\exp(\mathrm{i}Qu+\mathrm{i}P\nu) = \vdots\exp(\mathrm{i}Qu+\mathrm{i}P\nu)\vdots \tag{6.13}$$

其中 $\vdots\ \vdots$ 是 Weyl 编序记号, 引入变换核(称为量子范氏变换积分核)

$$\frac{1}{\pi}\vdots e^{-2\mathrm{i}(q-Q)(p-P)}\vdots \tag{6.14}$$

并利用有序算符内的积分技术将式(6.9)和式(6.10)推广到量子力学

$$\iint\frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi}\vdots e^{2\mathrm{i}(p-P)(q-Q)}\vdots e^{\lambda q+\sigma p} = \vdots e^{\mathrm{i}\lambda\sigma/2+\sigma Q+\lambda P}\vdots \tag{6.15}$$

$$\iint\frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi}\vdots e^{-2\mathrm{i}(p-P)(q-Q)}\vdots e^{\lambda q+\sigma p} = \vdots e^{-\mathrm{i}\lambda\sigma/2+\sigma Q+\lambda P}\vdots \tag{6.16}$$

另一方面, 可以证明变换核式(6.14)即为算符 $\delta(p-P)\delta(q-Q)$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\vdots\exp[-2\mathrm{i}(q-Q)(p-P)]\vdots\\
&=\iint\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}\nu}{4\pi^2}\vdots\exp\left[-\frac{\mathrm{i}u\nu}{2}+\mathrm{i}(q-Q)u+\mathrm{i}(p-P)\nu\right]\vdots\\
&=\iint\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}\nu}{4\pi^2}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}u\nu}{2}+\mathrm{i}(q-Q)u+\mathrm{i}(p-P)\nu\right]\\
&=\iint\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}\nu}{4\pi^2}e^{\mathrm{i}(p-P)\nu}e^{\mathrm{i}(q-Q)u}\\
&=\delta(p-P)\delta(q-Q)
\end{aligned} \tag{6.17}$$

类似地可以得到

$$\frac{1}{\pi}:\exp[2\mathrm{i}(q-Q)(p-P)]:=\delta(q-Q)\delta(p-P) \quad (6.18)$$

那么对于函数 $f(p, q)$则有

$$\iint\frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi}:\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(q-Q)(p-P)}:f(p, q)$$

$$=\iint\mathrm{d}p\mathrm{d}q\,\delta(p-P)\delta(q-Q)f(p, q)$$

$$=f(P, Q)\,|_{P\ \text{before}\ Q} \quad (6.19)$$

这就将一个经典函数 $f(p, q)$量子化为 $P-Q$ 排序算符. 另一方面,还有

$$\iint\frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi}:\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p-P)(q-Q)}:f(p, q)$$

$$=\iint\mathrm{d}p\mathrm{d}q\,\delta(q-Q)\delta(p-P)f(p, q)$$

$$=f(P, Q)\,|_{Q\ \text{before}\ P} \quad (6.20)$$

此即量子化经典函数 $f(p, q)$为 $Q-P$ 排序.

## 6.3 从 $P-Q(Q-P)$编序到 Weyl 编序[2]

作为上面的积分变换的应用,下面给出一个算符排序的例子. 对于积分公式

$$\iint\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi}x^m y^r\exp[2\mathrm{i}(y-s)(x-t)]$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+r}(-\mathrm{i})^r\mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}t, \mathrm{i}\sqrt{2}s) \quad (6.21)$$

其中 $\mathrm{H}_{m,r}$是双变量厄米多项式(2.92),它满足 $\mathrm{H}_{m,r}(t, s)=$

$(-1)^{m+r}\mathrm{e}^{st}\dfrac{\partial^{m+r}}{\partial s^m\,\partial t^r}\mathrm{e}^{-st}$. 利用厄米多项式 $\mathrm{H}_{m,n}$ 和拉盖尔多项式 $\mathrm{L}_n^{m-n}$ 之间的关系

$$\mathrm{H}_{m,n}(\xi,\kappa)=\begin{cases}n!(-1)^n\xi^{m-n}\mathrm{L}_n^{m-n}(\xi\kappa) & m>n\\ m!(-1)^m\kappa^{n-m}\mathrm{L}_m^{n-m}(\xi\kappa) & m<n\end{cases}\tag{6.22}$$

式(6.21)就变为

$$\iint\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi}x^m y^r\exp[2\mathrm{i}(y-q)(x-p)]$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+r}(-\mathrm{i})^r\begin{cases}r!(-1)^r\xi^{m-r}\mathrm{L}_r^{m-r}(2\mathrm{i}pq) & m>r\\ m!(-1)^m\kappa^{r-m}\mathrm{L}_m^{r-m}(2\mathrm{i}pq) & m<r\end{cases}\tag{6.23}$$

式(6.21)证明如下

$$\begin{aligned}&L.H.S\quad\text{of}\quad(6.21)\\ =&\frac{1}{(-2\mathrm{i})^{m+r}}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}st}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^r\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^m\iint\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}xy}\exp(-2\mathrm{i}yt-2\mathrm{i}sx)\\ =&\frac{1}{(-2\mathrm{i})^{m+r}}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}st}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^r\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^m\int\mathrm{d}x\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}sx}\delta(x-t)\\ =&\frac{1}{(-2\mathrm{i})^{m+r}}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}st}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^r\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^m\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}st}\\ =&R.H.S\quad\text{of}\quad(6.21)\end{aligned}\tag{6.24}$$

那么由式(6.21)和式(6.17)得到

$$\begin{aligned}Q^mP^r&=\iint\mathrm{d}p\mathrm{d}q\,q^m p^r\delta(q-Q)\delta(p-P)\\ &=\iint\frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi}q^m p^r\,\vdots\exp[2\mathrm{i}(p-P)(q-Q)]\vdots\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+r}(-\mathrm{i})^r \vdots \mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}Q, \mathrm{i}\sqrt{2}P) \vdots \tag{6.25}$$

这是一种将 $Q^m P^r$ 化为 Weyl 编序算符的简单方法，它与式(4.38)一致. 用同样的方法可得 $P^r Q^m$ 的 Weyl 编序形式，即

$$\begin{aligned} P^r Q^m &= \iint \mathrm{d}p\mathrm{d}q q^m p^r \delta(p-P)\delta(q-Q) \\ &= \iint \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi} q^m p^r \vdots \exp[-2\mathrm{i}(q-Q)(p-P)] \vdots \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+r}(-\mathrm{i})^r \vdots \mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}Q, -\mathrm{i}\sqrt{2}P) \vdots \end{aligned} \tag{6.26}$$

这也是一个新的算符恒等式.

## 6.4 从 Weyl 编序到 $P-Q(Q-P)$ 排序

由式(6.21)的反变换可以得到一个新的积分公式

$$\iint \frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}t}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+r}(-\mathrm{i})^r \mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}t, \mathrm{i}\sqrt{2}s)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(y-s)(x-t)} = x^m y^r \tag{6.27}$$

那么由式(6.17)和式(6.27)可得

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+r}(-\mathrm{i})^r \mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}Q, \mathrm{i}\sqrt{2}P)_{P \text{ before } Q} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+r}(-\mathrm{i})^r \iint \mathrm{d}p\mathrm{d}q\,\delta(p-P)\delta(q-Q)\mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}q, \mathrm{i}\sqrt{2}p) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+r}(-\mathrm{i})^r \iint \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi} \vdots \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(q-Q)(p-P)} \vdots \mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}q, \mathrm{i}\sqrt{2}p) \\ &= \vdots Q^m P^r \vdots \end{aligned} \tag{6.28}$$

又从厄米多项式(2.92)得

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+r}(-\mathrm{i})^r \mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}Q, \mathrm{i}\sqrt{2}P)_{P\ \text{before}\ Q}$$

$$=\sum_{l=0}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^l l!\binom{r}{l}\binom{m}{l}P^{r-l}Q^{m-l} \tag{6.29}$$

所以

$$\vdots Q^m P^r \vdots=\sum_{l=0}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^l l!\binom{r}{l}\binom{m}{l}P^{r-l}Q^{m-l} \tag{6.30}$$

式(6.30)是将 Weyl 编序的算符化为 $P-Q$ 排序的基本公式.

用同样的方法,有

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+r}(\mathrm{i})^r \mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}Q, -\mathrm{i}\sqrt{2}P)_{Q\ \text{before}\ P}$$

$$=\vdots Q^m P^r \vdots=\vdots P^r Q^m \vdots \tag{6.31}$$

所以

$$\vdots Q^m P^r \vdots=\sum_{l=0}\left(\frac{-\mathrm{i}}{2}\right)^l l!\binom{r}{l}\binom{m}{l}Q^{m-l}P^{r-l} \tag{6.32}$$

这是化 Weyl 编序的算符为 $Q-P$ 排序的公式.

## 6.5 $P-Q$ 排序和 $Q-P$ 排序的互换

联立式(6.25)和式(6.30)推出

$$Q^m P^r=\sum_{l=0}\frac{m!r!}{(m-l)!(r-l)!l!}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^l \vdots Q^{m-l}P^{r-l}\vdots$$

$$=\sum_{l=0}\frac{m!r!}{(m-l)!(r-l)!l!}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^l \times$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^k\binom{r-l}{k}\binom{m-l}{k}P^{r-l-k}Q^{m-l-k}\\
&=\sum_{l=0}\sum_{k=0}\frac{m!r!}{(m-l-k)!(r-l-k)!l!k!}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{l+k}P^{r-l-k}Q^{m-l-k}\\
&=\sum_{k=0}(\mathrm{i})^k\frac{m!r!}{(m-k)!(r-k)!k!}P^{r-k}Q^{m-k} \qquad (6.33)
\end{aligned}
$$

这将 $Q^mP^r$ 化为 $P-Q$ 排序，且得到对易关系

$$
[Q^m, P^r]=\sum_{k=1}\frac{m!r!}{(m-k)!(r-k)!k!}(\mathrm{i})^kP^{r-k}Q^{m-k} \qquad (6.34)
$$

类似地，由式(6.26)可将 $P^rQ^m$ 化为 $Q-P$ 排序，

$$
\begin{aligned}
P^rQ^m&=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+r}(\mathrm{i})^r\,\vdots\,\mathrm{H}(\sqrt{2}Q,-\mathrm{i}\sqrt{2}P)\,\vdots\\
&=\,\vdots\sum_{l=0}\frac{m!r!}{(m-l)!(r-l)!l!}\left(\frac{-\mathrm{i}}{2}\right)^lQ^{m-l}P^{r-l}\,\vdots\\
&=\sum_{k=0}(-\mathrm{i})^k\frac{m!r!}{(m-k)!(r-k)!k!}Q^{m-k}P^{r-k} \qquad (6.35)
\end{aligned}
$$

并得到对易关系

$$
[Q^m, P^r]=\sum_{k=1}\frac{m!r!}{(m-k)!(r-k)!k!}(\mathrm{i})^kQ^{m-k}P^{r-k} \qquad (6.36)
$$

## 6.6 $(P+Q)^n$ 的 $P-Q(Q-P)$ 排序

由于

$$
\begin{aligned}
(P+Q)^n&=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n}\mathrm{e}^{\lambda(P+Q)}\Big|_{\lambda=0}=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n}\,\vdots\,\mathrm{e}^{\lambda(P+Q)}\,\vdots\,\Big|_{\lambda=0}\\
&=\,\vdots\,(P+Q)^n\,\vdots=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\vdots\,Q^lP^{n-l}\,\vdots \qquad (6.37)
\end{aligned}
$$

将式(6.30)代入式(6.37)得到

$$(P+Q)^n = \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\sum_{k=0}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^k k!\binom{l}{k}\binom{n-l}{k}P^{l-k}Q^{n-l-k} \tag{6.38}$$

或者从式(6.32)可得

$$(P+Q)^n = \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\sum_{k=0}\left(\frac{-\mathrm{i}}{2}\right)^k k!\binom{l}{k}\binom{n-l}{k}Q^{l-k}P^{n-l-k} \tag{6.39}$$

## 6.7 Weyl 对应与量子范氏变换积分核的关系[3]

利用算符的 Weyl 编序公式(4.31)，我们来求 $\delta(p-P)\delta(q-Q)$ 的 Weyl 编序. 首先，利用坐标表象的完备性及 $\langle q \mid p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}pq}$ 可得，

$$\begin{aligned}
&\delta(p-P)\delta(q-Q)\\
&= \int \mathrm{d}p' \mid p'\rangle\langle p' \mid \delta(p-P)\delta(q-Q)\int \mathrm{d}q' \mid q'\rangle\langle q' \mid\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \mathrm{d}p' \mid p'\rangle\int \mathrm{d}q' \mid q'\rangle\delta(p-p')\delta(q-q')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'q'}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mid p\rangle\langle q \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}pq}
\end{aligned} \tag{6.40}$$

将式(6.40)代入到算符的 Weyl 编序展开公式(4.58)，并利用坐标本征态和相干态的内积

$$\langle q \mid \beta\rangle = \pi^{-1/4}\exp\left(-\frac{q^2}{2}+\sqrt{2}q\beta-\frac{1}{2}\beta^2-\frac{1}{2}\mid\beta\mid^2\right) \tag{6.41}$$

$$\langle -\beta \mid p\rangle = \pi^{-1/4}\exp\left(-\frac{p^2}{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}p\beta^* + \frac{1}{2}\beta^{*2} - \frac{1}{2}|\beta|^2\right) \tag{6.42}$$

就得到下列算符的 Weyl 排序形式

$$\begin{aligned}
&\delta(p-P)\delta(q-Q)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int \frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi} \vdots \langle -\beta \mid q\rangle\langle q \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}pq} \mid \beta\rangle \exp[2(\beta^* a - a^\dagger\beta + a^\dagger a)] \vdots\\
&= \frac{1}{\pi} \vdots \exp[\sqrt{2}q(a-a^\dagger) + \sqrt{2}\mathrm{i}p(a+a^\dagger) - 2\mathrm{i}pq + a^{\dagger 2} - a^2 - a^\dagger a] \vdots\\
&= \frac{1}{\pi} \vdots \exp[-2\mathrm{i}(q-Q)(p-P)] \vdots
\end{aligned} \tag{6.43}$$

与式(6.17)一致.以同样的方法,也有

$$\begin{aligned}
&\delta(q-Q)\delta(p-P)\\
&= 2\int \frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi} \vdots \langle -\beta \mid q\rangle\langle q \mid \mathrm{e}^{\mathrm{i}pq} \mid \beta\rangle \exp[2(\beta^* a - a^\dagger\beta + a^\dagger a)] \vdots\\
&= \frac{1}{\pi} \vdots \exp[2\mathrm{i}(q-Q)(p-P)] \vdots
\end{aligned} \tag{6.44}$$

与式(6.18)一致.

## 6.8 Wigner 算符和 $\delta(q-Q)\delta(p-P)$ 的互变

由 Wigner 算符的 Weyl 编序式(4.28)可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi} \vdots \exp[-2\mathrm{i}(q-Q)(p-P)] \vdots\\
&= \frac{1}{\pi}\iint \mathrm{d}p'\mathrm{d}q'\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(q-q')(p-p')} \vdots \delta(q'-Q)\delta(p'-P) \vdots
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi}\iint dp' dq' e^{-2i(q-q')(p-p')} \Delta(q', p') \tag{6.45}$$

从式(6.45)和式(6.43)立即得到

$$\frac{1}{\pi}\iint dp' dq' \Delta(q', p') e^{-2i(p-p')(q-q')} = \delta(p-P)\delta(q-Q) \tag{6.46}$$

同理有

$$\frac{1}{\pi}\iint dp' dq' \Delta(q', p') e^{2i(p-p')(q-q')} = \delta(q-Q)\delta(p-P) \tag{6.47}$$

所以$\frac{1}{\pi}e^{\pm 2i(p-p')(q-q')}$可以分别看作是 $\delta(q-Q)\delta(p-P)$和 $\delta(p-P)\delta(q-Q)$的经典 Weyl 对应. 从式(6.45)立得其反变换为

$$\iint \frac{dp dq}{\pi} :\exp[-2i(q-Q)(p-P)]: e^{2i(p-p')(q-q')}$$
$$= \Delta(q', p') \tag{6.48}$$

从式(6.43)即看出

$$\iint dp dq\, \delta(p-P)\delta(q-Q) e^{2i(p-p')(q-q')} = \Delta(q', p') \tag{6.49}$$

以及

$$\iint dp dq\, \delta(q-Q)\delta(p-P) e^{-2i(p-p')(q-q')} = \Delta(q', p') \tag{6.50}$$

从式(6.46)到式(6.50)都是 Wigner 算符在 $q-p$ 空间的范氏积分变换. 式(6.48)右边乘以$\iint dp' dq' h(p', q')$可得

$$\iint dp' dq' h(p', q') \Delta(p', q')$$

$$= \iint \mathrm{d}p'\mathrm{d}q' h(p', q') \iint \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi} \vdots \exp[-2\mathrm{i}(q-Q)(p-P)] \vdots \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p-p')(q-q')}$$

$$= \iint \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi} \vdots \exp[-2\mathrm{i}(q-Q)(p-P)] \vdots G(p, q) \tag{6.51}$$

参见范氏变换的定义式(6.2),可知 $G$ 是 $h$ 的范氏变换.

以上讨论也可换成以下的分式进行,注意到

$$\frac{1}{\pi}\exp[2\mathrm{i}(p-x)(q-y)]$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\nu}{2\pi}\delta\left(q-y-\frac{\nu}{2}\right)\exp[\mathrm{i}(p-x)\nu] \tag{6.52}$$

即 $h$ 的范氏变换为

$$h(p, q) \to \iint \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p-x)(q-y)} h(p, q)$$

$$= \iint \mathrm{d}p\mathrm{d}q \int \frac{\mathrm{d}\nu}{2\pi}\delta\left(q-y-\frac{\nu}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-x)\nu} h(p, q)$$

$$= \iint \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}pq} h\left(p+x, y+\frac{q}{2}\right) \tag{6.53}$$

那么 Wigner 算符为

$$\Delta(p, q) \to \iint \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}pq}\Delta\left(p+x, y+\frac{q}{2}\right)$$

$$= \iint \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{4\pi^2}\int \mathrm{d}u\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+x)u}\left|y+\frac{q}{2}-\frac{u}{2}\right\rangle\left\langle y+\frac{q}{2}+\frac{u}{2}\right|\mathrm{e}^{\mathrm{i}pq}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}u\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xu}\delta(q-u)\left|y+\frac{q}{2}-\frac{u}{2}\right\rangle\left\langle y+\frac{q}{2}+\frac{u}{2}\right|$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xu}\,|\,y\rangle\langle y+u\,|$$

$$= | y\rangle\langle y | \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(P-x)u}$$

$$= \delta(y-Q)\delta(x-P) \tag{6.54}$$

所以

$$\frac{1}{\pi}\iint \mathrm{d}p'\mathrm{d}q' \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p'-x)(q'-y)} \Delta(p', q') = \delta(y-Q)\delta(x-P) \tag{6.55}$$

与式(6.47)一致. 因此范氏积分变换可以将 Wigner 函数 $W_\psi(p, q) \equiv \mathrm{Tr}[\rho\Delta(p, q)]$ 转变为

$$\iint \frac{\mathrm{d}p'\mathrm{d}q'}{\pi} \mathrm{Tr}[\rho\Delta(p', q')] \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p-p')(q-q')}$$

$$= \mathrm{Tr}[\rho\delta(q-Q)\delta(p-P)]$$

$$= \iint \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{4\pi^2} \mathrm{Tr}[\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q-Q)u} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-P)v}] \tag{6.56}$$

可以定义 $\mathrm{Tr}[\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q-Q)u} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-P)v}]$ 为密度矩阵的 $Q-P$ 特征函数. 类似地有

$$\iint \frac{\mathrm{d}p'\mathrm{d}q'}{\pi} \mathrm{Tr}[\rho\Delta(p', q')] \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(p-p')(q-q')}$$

$$= \mathrm{Tr}[\rho\delta(p-P)\delta(q-Q)]$$

$$= \iint \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{4\pi^2} \mathrm{Tr}[\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-P)v} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q-Q)u}] \tag{6.57}$$

$\mathrm{Tr}[\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-P)v} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q-Q)u}]$ 就是 $\rho$ 的 $P-Q$ 特征函数.

## 6.9 从 chirplet 函数到分数傅里叶变换[4]

从光学的发展历史看,每一个光学设备都对应着一种光学变

换，像透镜组用作为分数傅里叶变换的变换器件. 反之，一旦有新的光学变换被发现，我们就期望能够通过光学设备去实现它. 例如，函数的分数傅里叶变换最初由 Namias 作为解决理论物理问题的数学工具而提出，后来 Mendlovic，Ozakatas 等探索了它在光学上的应用，重新定义其为光场沿二次渐变折射率(GRIN)介质传播造成的变化. 本节，将给出范氏变换在相空间的一个应用，它使我们从"啁啾"函数导出分数傅里叶变换核.

首先，回顾一下函数 $\psi(q)$ 的 Wigner 变换，

$$\psi(q) \to \int \frac{\mathrm{d}u}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}pu} \psi^* \left(q + \frac{u}{2}\right) \psi\left(q - \frac{u}{2}\right) \tag{6.58}$$

用 Dirac 符号函数 $\psi(q)$ 可以写为 $\psi(q) = \langle q \mid \psi \rangle$，$|q\rangle$ 是坐标算符 $Q$ 的本征态 $Q \mid q \rangle = q \mid q \rangle$，那么从方程(6.58)可以得到 Wigner 算符式(4.8)，由 Weyl - Wigner 对应式(4.7)可知

$$h(p,\ q) = \int \mathrm{d}u \mathrm{e}^{-\mathrm{i}pu} \left\langle q + \frac{u}{2} \middle| H(P,\ Q) \middle| q - \frac{u}{2} \right\rangle \tag{6.59}$$

$h(p,\ q)$ 是算符 $H(P,\ Q)$ 的经典 Weyl 对应. 将式(6.59)代入范氏变换(6.2)得

$$\begin{aligned}
&\iint \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p-x)(q-y)} h(p,\ q) \\
&= \iint \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p-x)(q-y)} \int \mathrm{d}u \mathrm{e}^{-\mathrm{i}pu} \left\langle q + \frac{u}{2} \middle| H(P,\ Q) \middle| q - \frac{u}{2} \right\rangle \\
&= \int \mathrm{d}q \int \mathrm{d}u \left\langle q + \frac{u}{2} \middle| H(P,\ Q) \middle| q - \frac{u}{2} \right\rangle \delta\left(q - y - \frac{u}{2}\right) \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x(q-y)} \\
&= \int \mathrm{d}u \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xu} \langle y + u \mid H(P,\ Q) \mid y \rangle
\end{aligned} \tag{6.60}$$

又因为 $\langle y + u \mid = \langle u \mid \mathrm{e}^{\mathrm{i}Py}$，$(\sqrt{2\pi})^{-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xu} = \langle p_{=x} \mid u \rangle$ 并且

$$\int \mathrm{d}u\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xu} \langle y + u \mid = \int \mathrm{d}u\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xu} \langle u \mid \mathrm{e}^{\mathrm{i}Py}$$

$$= \sqrt{2\pi}\int du \langle p_{=x} \mid u\rangle\langle u \mid e^{iPy}$$

$$= \sqrt{2\pi}\langle p_{=x} \mid e^{ixy} \tag{6.61}$$

所以式(6.60)变为

$$\iint \frac{dpdq}{\pi} e^{2i(p-x)(q-y)} h(p, q) = \sqrt{2\pi}\langle p_{=x} \mid H(P, Q) \mid y\rangle e^{ixy} \tag{6.62}$$

因此我们得到了相空间函数 $h(p, q)$ 和其 Weyl - Wigner 对应 $H(P, Q)$ 之间的一个新的积分变换公式. 式(6.62)的逆变换为

$$\iint \frac{dpdq}{\sqrt{\pi/2}} e^{-2i(p-x)(q-y)} \langle p_{=x} \mid H(P, Q) \mid y\rangle e^{ixy} = h(p, q) \tag{6.63}$$

例如对于 $H(P, Q) = e^{f(P^2+Q^2-1)/2}$，它的经典对应为

$$e^{f(P^2+Q^2-1)/2} \rightarrow h(p, q) = \frac{2}{e^f+1}\exp\left[2\,\frac{e^f-1}{e^f+1}(p^2+q^2)\right] \tag{6.64}$$

将式(6.64)代入式(6.62)可得

$$\frac{2}{e^f+1}\iint \frac{dpdq}{\pi} e^{2i(p-x)(q-y)} \exp\left[2\,\frac{e^f-1}{e^f+1}(p^2+q^2)\right]$$

$$= \sqrt{2\pi}\langle p_{=x} \mid e^{f(P^2+Q^2-1)/2} \mid y\rangle e^{ixy} \tag{6.65}$$

对于高斯积分公式

$$\iint \frac{dpdq}{\pi} e^{2i(p-x)(q-y)}\, e^{-\lambda(p^2+q^2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}\exp\left[\frac{-\lambda(x^2+y^2)}{\lambda^2+1} + \frac{2i\lambda^2}{\lambda^2+1}xy\right] \tag{6.66}$$

当

$$\lambda = -\mathrm{i}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) \tag{6.67}$$

$$\frac{-\lambda}{\lambda^2+1}=\frac{\mathrm{i}}{2\tan\alpha},\ \frac{2\lambda^2}{\lambda^2+1}=1-\frac{1}{\sin\alpha} \tag{6.68}$$

式(6.66)变为

$$\frac{2}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}+1}\iint\frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p-x)(q-y)}\exp\left[\mathrm{i}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)(p^2+q^2)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{i}\sin\alpha\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}(x^2+y^2)}{2\tan\alpha}-\frac{\mathrm{i}xy}{\sin\alpha}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy} \tag{6.69}$$

其中 $\exp\left[\mathrm{i}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)(p^2+q^2)\right]$是一个无限长的“啁啾”函数. 比较式(6.65)和式(6.69)可以看出当取 $\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}=\mathrm{e}^f$，$f=\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$，那么

$$\langle p_{=x}\mid \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)(P^2+Q^2-1)/2}\mid y\rangle$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\mathrm{i}\sin\alpha\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}(x^2+y^2)}{2\tan\alpha}-\frac{\mathrm{i}xy}{\sin\alpha}\right] \tag{6.70}$$

式(6.70)右边正好就是分数傅里叶变换的积分核，所以利用范氏变换可以由“啁啾”函数导出分数傅里叶变换. 我们期望能在实验中实现这一变换.

## 6.10 应用范氏变换解方程[5]

傅里叶变换、拉普拉斯变换常被用来求解热传导方程、波动方程等，这节我们应用范氏变换来求解一些比较复杂的偏微分方程.

为了书写的方便，本节用$\hat{f}(p,q)$标记任意函数 $f(x,y)$的范

氏变换.

对方程(6.2)做 $p$ 的偏导,得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p}\hat{f}(p, q) &= -2\mathrm{i}\iint\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(p-x)(q-y)}(q-y)f(x, y) \\
&= -2\mathrm{i}q\hat{f}(p, q)+2\mathrm{i}\,\widehat{yf}(p, q)
\end{aligned} \tag{6.71}
$$

其中$\widehat{yf}$是 $yf(x, y)$的范氏变换.所以式(6.71)变为

$$
\widehat{yf}(p, q)=\left(q-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)\hat{f}(p, q) \tag{6.72}
$$

同样做 $q$ 的偏导可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial q}\hat{f}(p, q) &= -2\mathrm{i}\iint\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(p-x)(q-y)}(p-x)f(x, y) \\
&= -2\mathrm{i}p\hat{f}(p, q)+2\mathrm{i}\,\widehat{xf}(p, q)
\end{aligned} \tag{6.73}
$$

所以有[记$\widehat{xf}$是 $xf(x, y)$的范氏变换]

$$
\widehat{xf}(p, q)=\left(p-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial}{\partial q}\right)\hat{f}(p, q) \tag{6.74}
$$

另一方面,函数 $f(x, y)$对 $x$ 做偏导后的范氏变换为

$$
\begin{aligned}
\widehat{\partial_x f}(p, q) &= \iint\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(p-x)(q-y)}f_x(x, y) \\
&= \int\frac{\mathrm{d}y}{\pi}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(p-x)(q-y)}f(x, y)\Big|_{x=-\infty}^{+\infty}- \\
&\quad 2\mathrm{i}\iint\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(p-x)(q-y)}(q-y)f(x, y) \\
&= \frac{\partial}{\partial p}\hat{f}(p, q)
\end{aligned} \tag{6.75}
$$

同理有,

$$
\widehat{\partial_y f}(p, q)=\frac{\partial}{\partial q}\hat{f}(p, q) \tag{6.76}
$$

综合上面的方程有

$$\widehat{\left(x+\frac{\mathrm{i}}{2}\partial_y\right)f} = p\hat{f}(p,q) \tag{6.77}$$

$$\widehat{\left(y+\frac{\mathrm{i}}{2}\partial_x\right)f} = q\hat{f}(p,q) \tag{6.78}$$

所以对经典函数 $f(x,y)$偏导数的某些组合将被变换为作用于 $\hat{f}(p,q)$的代数因子

$$\widehat{L\left(x+\frac{\mathrm{i}}{2}\partial_y,\ y+\frac{\mathrm{i}}{2}\partial_x\right)f} = L(p,q)\,\hat{f}(p,q) \tag{6.79}$$

下面看几个例子.

例一,方程

$$u_x + u_y - 2\mathrm{i}(x+y)u = u_t \tag{6.80}$$

它可以很简洁地写为如下形式

$$L_1\left(x+\frac{\mathrm{i}}{2}\partial_y,\ y+\frac{\mathrm{i}}{2}\partial_x\right)u = 0 \tag{6.81}$$

其中

$$L_1(p,q) \equiv -2\mathrm{i}(p+q) - \frac{\partial}{\partial t} \tag{6.82}$$

所以 $u$ 的变化$\hat{u}(p,q,t)$满足

$$-2\mathrm{i}(p+q)\,\hat{u}(p,q,t) - \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(p,q,t) = 0 \tag{6.83}$$

这个方程的解为

$$\hat{u}(p,q,t) = C(p,q)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(p+q)t} \tag{6.84}$$

其中

$$C(p, q)=\hat{u}(p, q, t=0)$$
$$=\iint \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(p-x)(q-y)}u(x, y, t=0) \tag{6.85}$$

再根据范氏变换的反变换,得到最终结果为

$$u(x, y, t)=\iint \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi}C(p, q)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(p+q)t}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p-x)(q-y)} \tag{6.86}$$

例二,方程

$$u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}-4\mathrm{i}(x+y)(u_x+u_y)-4(x+y)^2u-4\mathrm{i}u=u_{tt} \tag{6.87}$$

标记

$$L_2(p, q)\equiv -4(p+q)^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{6.88}$$

所以 $u$ 的变换满足的方程为

$$\left[-4(p+q)^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\hat{u}(p, q, t)=0 \tag{6.89}$$

这个方程的解是

$$\hat{u}(p, q, t)=C_+(p, q)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p+q)t}+C_-(p, q)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(p+q)t} \tag{6.90}$$

其中

$$C_+(p, q)=\frac{1}{2}\hat{u}(x, y, t=0)-\frac{\mathrm{i}}{4(p+q)}\hat{u}_t(x, y, t=0) \tag{6.91}$$

$$C_-(p, q)=\frac{1}{2}\hat{u}(x, y, t=0)+\frac{\mathrm{i}}{4(p+q)}\hat{u}_t(x, y, t=0) \tag{6.92}$$

例三，方程

$$u_{xy}-2\mathrm{i}(xu_x+yu_y)-4xyu-2\mathrm{i}u=2\mathrm{i}u_t \tag{6.93}$$

引入

$$L_3(p,q)=-4pq-2\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} \tag{6.94}$$

那么 $u$ 的范氏变换满足的方程为

$$\left(-4pq-2\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\hat{u}(p,q,t)=0 \tag{6.95}$$

解之得到

$$\hat{u}(p,q,t)=C(p,q)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}pqt} \tag{6.96}$$

其中 $C(p,q)$ 的形式为

$$\begin{aligned}C(p,q)&=\hat{u}(p,q,t=0)\\&=\iint\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(p-x)(q-y)}u(x,y,t=0)\end{aligned} \tag{6.97}$$

在相空间，我们建立了范氏变换和偏微分方程之间的联系，这对于解决某些偏微分方程是非常有用的. 我们相信这种方法可以推广开来解更多的数理方程，它将是一类很有发展前景的数学物理工具.

# 参考文献


[1] Fan Hongyi. A New Kind of Two-Fold Integration Transformation in Phase Space and Its Uses in Weyl Ordering of Operators [J]. Commun. Theor. Phys., 2008, 50: 935 - 937.

[2] Fan Hongyi, He Rui. A new approach for studying coordinate-momentum operator ordering problems [J]. to be published.

[3] Fan Hongyi. An approach for converting Weyl ordered operators to Q - P ordering and P - Q ordering [J]. to be published.

[4] Fan Hongyi, Hu Liyun. New relation between input and output fields based on Collins diffraction formula and the Wigner function in entangled state representation [J]. Jour. Mod. Opt., 2009,56:1819 - 1823.
[5] Fan Hongyi, Chen Junhua, He Rui. Solving some partial differential equations by the two-fold integration transformation in p - q phase space [J]. to be published.

# 第7章　纠缠态表象中的 Wigner 函数

1935 年爱因斯坦等三人针对量子物理学的完备性发表了一篇后来被称为《EPR 悖论》的文章，EPR 是作者 Einstein，Podolski 和 Rosen 三个词的词头，文中提出了量子纠缠（quantum entanglement）的概念，而后由 Schrödinger 做进一步阐述，纠缠是量子力学特有的概念，反映了两体或多体系统各部分之间的量子关联（correlation）与不可分离性（nonseparability）. 自 1993 年 Bernett 等人通过深入剖析量子纠缠，第一次提出量子隐形传态（teleportation）方案以来，人们对量子态的离物传输产生了极大的兴趣，多种信息载体的各种量子隐形传态方案相继问世，与量子态的纠缠性质密切相关的量子信息科学受到当今人的重视. 但是，我们不禁要问：如果爱因斯坦还活着、思维也还敏捷，他会相信“离物传输”这个魔幻般的东西吗？普朗克晚年时曾告诫说：“世界充满了问题……，倘使我们经过长期的费尽心力之后，觉得这是一个假问题，我们为它投入的所有脑力劳动付诸东流.”所以我们要十分谨慎地对待量子隐形传态这个颇具诱惑力的问题，多在基本理论方面下功夫，为此本章将较具体地介绍量子纠缠态表象及其各种物理应用.

## 7.1　反映量子纠缠性质的两粒子纠缠态表象 $|\eta\rangle$

1935 年，爱因斯坦等三人批评海森堡的测不准关系所代表的量子物理学的非决定论，认为有某些“隐含的”变量被忽略了. 他们以两个粒子（其总动量和相对坐标算符是对易量）做相反方向运动

为例，假设两个粒子已彼此远离，当人们只希望测试两个粒子中的一个，但由于其总动量和相对坐标算符是对易量，事实上，测试 $A$ 点处的粒子可以了解另一粒子的情况，即会对 $B$ 点处的粒子有“瞬时”反应，而 $B$ 与 $A$ 已经“相隔了十万八千里”. $A$ 点测量的结果表明“物理实在”量比海森堡论限制的要多，因此，爱因斯坦等三人认为现行的量子力学是不完备的，爱因斯坦等的文章使人们注意到了量子整体性这一概念，并用“纠缠”来描述这一整体性. 这使我们想到南唐李煜（李后主）的一首词中的一句“剪不断，理还乱”来形容量子纠缠量是再合适不过的了. 例如，对粒子纠缠态再也不能孤立地把其部分体看作为一个量子态，而应把两者作为一个整体的量子态来看待. 当然，处于这一整体中的两个部分是可以区分的，谈论其各自的属性仍有意义. 由 Fan - Klauder 构建的两粒子纠缠态表象 $|\eta\rangle$ 态（纠缠态）提供了一个理解量子整体性与其部分之间的关系的范例.

首先直接构造出连续纠缠态表象，这会有助于我们深入理解爱因斯坦的思想. 参考第 2 章相干态表象完备性的纯高斯型积分形式（2.61）可以直接构造出

$$\int \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi} :\exp\{-[\eta-(a_1-a_2^\dagger)][\eta^*-(a_1^\dagger-a_2)]\}:$$
$$=\int \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi} :\exp[-|\eta-(a_1-a_2^\dagger)|^2]:=1. \qquad (7.1)$$

$\eta=\eta_1+\mathrm{i}\eta_2$ 是复数，分解被积算符函数得到

$$\int \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\exp\left[-\frac{|\eta|^2}{2}+\eta a_1^\dagger-\eta^* a_2^\dagger+a_1^\dagger a_2^\dagger\right]$$
$$:\mathrm{e}^{-a_1^\dagger a_1-a_2^\dagger a_2}:\exp\left[-\frac{|\eta|^2}{2}+\eta^* a_1-\eta a_2+a_1 a_2\right]=1 \quad (7.2)$$

再考虑到 $:\exp[-a_1^\dagger a_1-a_2^\dagger a_2]:=|00\rangle\langle 00|$，可见式（7.2）中包含了一对互共轭态矢，即式（7.2）可写为

$$\int \frac{d^2\eta}{\pi} | \eta\rangle\langle\eta | = 1, \tag{7.3}$$

这样很自然就得到了一个新的态矢$|\eta\rangle$，它在双模 Fock 空间中的表达式为

$$|\eta\rangle = \exp\left[-\frac{|\eta|^2}{2} + \eta a_1^\dagger - \eta^* a_2^\dagger + a_1^\dagger a_2^\dagger\right]|00\rangle, \tag{7.4}$$

且看到

$$(a_1 - a_2^\dagger)|\eta\rangle = \eta|\eta\rangle,\ (a_1^\dagger - a_2)|\eta\rangle = \eta^*|\eta\rangle. \tag{7.5}$$

用 IWOP 技术从式(2.61)构造式(7.1)是直接的，可见该技术是寻找新的表象和量子态的有力工具，并且这也是目前证明表象完备性的较为简洁明了的办法. 反之，如果没有 IWOP 技术，$|\eta\rangle$的完备性证明就要费一番周折了. 由 $Q_j = \frac{a_j + a_j^\dagger}{\sqrt{2}}$，$P_j = \frac{a_j - a_j^\dagger}{\sqrt{2}\mathrm{i}}$，$j = 1, 2$；且$[Q_1 - Q_2, P_1 + P_2] = 0$，根据式(7.5)得

$$(Q_1 - Q_2)|\eta\rangle = \sqrt{2}\eta_1|\eta\rangle,\ (P_1 + P_2)|\eta\rangle = \sqrt{2}\eta_2|\eta\rangle \tag{7.6}$$

$|\eta\rangle$正是 EPR 所讨论的两粒子相对坐标和总动量的共同本征态. 可以说，具有纠缠的物理问题在纠缠态表象中分析最为清晰.

## 7.2 $|\eta\rangle$的共轭表象$|\xi\rangle$

类似于式(7.1)，还可以构造一个新等式

$$\int \frac{d^2\xi}{\pi} :\exp\{-[\xi - (a_1 + a_2^\dagger)][\xi^* - (a_1^\dagger + a_2)]\}: = 1, \tag{7.7}$$

将其中的被积算符分解为

$$\int \frac{d^2\xi}{\pi} \exp\left[-\frac{|\xi|^2}{2} + \xi a_1^\dagger + \xi^* a_2^\dagger - a_1^\dagger a_2^\dagger\right] : e^{-a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2} :$$

$$\exp\left[-\frac{|\xi|^2}{2} + \xi^* a_1 + \xi a_2 - a_1 a_2\right] = 1 \qquad (7.8)$$

这样就得到了另外一个新表象$|\xi\rangle$

$$\exp\left[-\frac{|\xi|^2}{2} + \xi a_1^\dagger + \xi^* a_2^\dagger - a_1^\dagger a_2^\dagger\right] |00\rangle = |\xi\rangle, \ \xi = \xi_1 + \mathrm{i}\xi_2, \qquad (7.9)$$

式(7.8)可简写成

$$\int \frac{d^2\xi}{\pi} |\xi\rangle\langle\xi| = 1, \qquad (7.10)$$

$|\xi\rangle$满足本征方程

$$(a_1 + a_2^\dagger)|\xi\rangle = \xi|\xi\rangle, \ (a_1^\dagger + a_2)|\xi\rangle = \xi^*|\xi\rangle. \quad (7.11)$$

可以证明，$|\xi\rangle$是质心坐标和相对动量的共同本征态，即

$$(Q_1 + Q_2)|\xi\rangle = \sqrt{2}\xi_1|\xi\rangle, \ (P_1 - P_2)|\xi\rangle = \sqrt{2}\xi_2|\xi\rangle, \qquad (7.12)$$

这里 $[Q_1 + Q_2, P_1 - P_2] = 0$. 由式(7.6)和式(7.12)，还可以将$|\eta\rangle$和$|\xi\rangle$的完备性关系分别改写为

$$\int \frac{d^2\eta}{\pi} |\eta\rangle\langle\eta| = \iint \frac{d\eta_1 d\eta_2}{\pi} : e^{-\left[\left(\eta_1 - \frac{Q_1 - Q_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\eta_2 - \frac{P_1 + P_2}{\sqrt{2}}\right)^2\right]} := 1 \qquad (7.13)$$

和

$$\int \frac{d^2\xi}{\pi} |\xi\rangle\langle\xi| = \iint \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\pi} : e^{-\left[\left(\xi_1 - \frac{Q_1 + Q_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\xi_2 - \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{2}}\right)^2\right]} := 1 \qquad (7.14)$$

由式(7.5)很容易证明$|\eta\rangle$的正交性关系，即

$$\langle \eta' \mid \eta \rangle = \pi\delta(\eta^* - \eta'^*)\delta(\eta - \eta'), \tag{7.15}$$

$|\xi\rangle$的正交性关系也是类似的. 用平移算符 $D_1(\xi) = \exp(\xi a_1^\dagger - \xi^* a_1)$ 可以将$|\xi\rangle$改写为

$$| \xi \rangle = D_1(\xi) e^{a_1^\dagger a_2^\dagger} \mid 00 \rangle \tag{7.16}$$

## 7.3 Wigner 函数的纠缠态表示及其时间演化[1]

引入一个虚的 Fock 态$|\tilde{m}\rangle$，它张成完备的空间，记为

$$\sum_m^\infty \mid \tilde{m} \rangle\langle \tilde{m} \mid = 1, \mid \tilde{m} \rangle = \frac{\tilde{a}^{\dagger m}}{\sqrt{m!}} \mid \tilde{0} \rangle \tag{7.17}$$

则

$$\sum_m^\infty \mid m\tilde{m} \rangle = \sum_m^\infty \frac{a^{\dagger m} \tilde{a}^{\dagger m}}{m!} \mid 0\,\tilde{0} \rangle = e^{a^\dagger \tilde{a}^\dagger} \mid 0\,\tilde{0} \rangle \tag{7.18}$$

令 $D(\tau) = \exp(\tau a^\dagger - \tau^* a)$，$D(\tau) e^{a^\dagger \tilde{a}^\dagger} |0\,\tilde{0}\rangle = |\tau\rangle$，以及

$$| \rho \rangle = \rho e^{a^\dagger \tilde{a}^\dagger} \mid 0\,\tilde{0} \rangle \tag{7.19}$$

那么密度算符 $\rho$ 的 Wigner 函数 $\mathrm{Tr}(\rho\Delta(\alpha)) \equiv W(\alpha)$ 就可以改写为

$$\begin{aligned} W(\alpha) &= \sum_{m,n}^\infty \langle n, \tilde{n} \mid \Delta(\alpha)\rho \mid m, \tilde{m} \rangle \\ &= \pi^{-1} \langle \tau = 0 \mid D^\dagger(-2\alpha)(-1)^{a^\dagger a} \mid \rho \rangle \\ &= \pi^{-1} \langle \tau = -2\alpha \mid (-1)^{a^\dagger a} \mid \rho \rangle \\ &= \pi^{-1} \langle \nu = 2\alpha \mid \rho \rangle \end{aligned} \tag{7.20}$$

其中用了 $\Delta(\alpha) = \pi^{-1} D^\dagger(-2\alpha)(-1)^{a^\dagger a}$，$\langle \nu = 2\alpha \mid$ 是类属于$\langle \xi |$表象的态矢量，即

$$
\begin{aligned}
|\nu\rangle &= D(\nu)\mathrm{e}^{-a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger}}\,|0\,\tilde{0}\rangle \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}|\nu|^2 + \nu a^{\dagger} + \nu^* \tilde{a}^{\dagger} - a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger}\right)|0\,\tilde{0}\rangle,
\end{aligned}
$$

$$
\int \frac{\mathrm{d}^2\nu}{\pi}|\nu\rangle\langle\nu| = 1,\ \int \frac{\mathrm{d}^2\tau}{\pi}|\tau\rangle\langle\tau| = 1,
$$

$$
\langle\tau|\nu\rangle = \frac{1}{2}\exp\left[\frac{1}{2}(\tau^*\nu - \tau\nu^*)\right] \tag{7.21}
$$

$|\nu\rangle$是$|\tau\rangle$的共轭态，

$$
|\tau\rangle = (-1)^{\tilde{a}^{\dagger}\tilde{a}}\,|\nu\rangle\Big|_{\nu=\tau}
$$

$$
(-1)^{a^{\dagger}a}\,|\tau\rangle = |\nu\rangle\Big|_{\nu=-\tau} \tag{7.22}
$$

在文献[1]中，用纠缠态表象导出了信号经过振幅衰减通道后的表达式

$$
\langle\tau|\rho(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}T|\tau|^2}\langle\tau\mathrm{e}^{-\kappa t}|\rho_0\rangle \tag{7.23}
$$

其中 $\rho_0$ 是初始时刻信号的密度矩阵，$\rho(t)$是终了时刻的信号的密度矩阵. 式(7.23)是以下密度矩阵主方程的解

$$
\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \kappa(2a\rho a^{\dagger} - a^{\dagger}a\rho - \rho a^{\dagger}a) \tag{7.24}
$$

其中 $\kappa$ 是衰减速率，$T = 1 - \mathrm{e}^{-2\kappa t}$. 如果要求相应的 Wigner 函数的时间演化，就可以用式(7.20)以及$|\tau\rangle$表象的完备性，即

$$
W(\alpha,\alpha^*) = \int \frac{\mathrm{d}^2\tau}{\pi^2}\langle\nu = 2\alpha|\tau\rangle\langle\tau|\rho\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^2\tau}{2\pi^2}\mathrm{e}^{\alpha^*\tau - \alpha\tau^*}\langle\tau|\rho\rangle \tag{7.25}
$$

在其中代入式(7.23)就得到

$$W(\alpha, \alpha^*, t) = \int \frac{d^2\tau}{2\pi^2} e^{\alpha^*\tau - \alpha\tau^* - \frac{1}{2}T|\tau|^2} \langle \tau e^{-\kappa t} \mid \rho_0 \rangle \tag{7.26}$$

再插入$|\nu\rangle$表象的完备性并用式(7.20)得

$$\begin{aligned}
& W(\alpha, \alpha^*, t) \\
&= \int \frac{d^2\nu'}{\pi} \int \frac{d^2\tau}{2\pi^2} e^{\alpha^*\tau - \alpha\tau^* - \frac{1}{2}T|\tau|^2} \langle \tau e^{-\kappa t} \mid \nu' \rangle \langle \nu' \mid \rho_0 \rangle \\
&\overset{\nu'=2\beta}{=} \int \frac{d^2\beta d^2\tau}{\pi^3} \exp\Big[-\frac{1}{2}T \mid \tau \mid^2 + \tau(\alpha^* - \beta^* e^{-\kappa t}) + \\
&\quad (\beta e^{-\kappa t} - \alpha)\tau^*\Big] W(\beta, \beta^*, 0) \\
&= \frac{2}{T} \int \frac{d^2\beta}{\pi} \exp\Big(-\frac{2}{T} \mid \alpha - \beta e^{-\kappa t} \mid^2\Big) W(\beta, \beta^*, 0)
\end{aligned} \tag{7.27}$$

这就是 Wigner 函数在振幅衰减通道中的时间演化规律，首次由范洪义-胡利云用纠缠态表象导出.

## 7.4 $|\eta\rangle$态纠缠分析

为了说明$|\eta\rangle$（和$|\xi\rangle$）态的纠缠性，对$|\eta\rangle$态做以下的傅里叶变换

$$\begin{aligned}
\int \frac{d\eta_2}{2\pi} \mid \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1 + \eta_2) \rangle e^{-iq\eta_2} \\
&= \pi^{-1/2} \exp\Big[-\frac{1}{2}(a_1^\dagger + a_2^\dagger - \sqrt{2}q)^2 - \frac{\eta_1^2}{4} + \\
&\quad \frac{\eta_1}{\sqrt{2}}(a_1^\dagger - a_2^\dagger) + a_1^\dagger a_2^\dagger\Big] \mid 00 \rangle
\end{aligned} \tag{7.28}$$

回忆坐标本征态在 Fock 表象中的形式式(2.21)，因而

$$\int \frac{d\eta_2}{2\pi}\left|\eta=\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1+\eta_2)\right\rangle e^{-iq\eta_2} = \left|q+\frac{\eta_1}{2}\right\rangle_1 \otimes \left|q-\frac{\eta_1}{2}\right\rangle_2 \tag{7.29}$$

其逆变换为

$$\int dq \left|q+\frac{\eta_1}{2}\right\rangle_1 \otimes \left|q-\frac{\eta_1}{2}\right\rangle_2 e^{iq\eta_2} = \left|\eta=\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1+\eta_2)\right\rangle \tag{7.30}$$

这是连续纠缠态的分解(在文献中曾称纠缠态的分解为 Schmidt 分解). 这个分解式有很多可取之处,例如,当对第二个粒子做位置测量,相应的算符为$|q\rangle_{22}\langle q|$,则有

$$\begin{aligned} {}_2\langle q \mid \eta\rangle &= e^{-i\eta_1\eta_2/2}\int dq' \mid q'\rangle_1 \delta(q-q'+\eta_1)e^{iq'\eta_2} \\ &= \mid q+\eta_1\rangle_1 e^{iq\eta_2+i\eta_1\eta_2/2} \end{aligned} \tag{7.31}$$

即测量粒子 2 的结果是使粒子 1 处于$|q+\eta_1\rangle_1$ 态,位置在 $q+\eta_1$ 处. 另一方面,对$|\eta\rangle$做另一形式的傅里叶变换

$$\int \frac{d\eta_1}{2\pi}\left|\eta=\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1+\eta_2)\right\rangle e^{ip\eta_1} = \left|p+\frac{\eta_2}{2}\right\rangle_1 \otimes \left|-p+\frac{\eta_2}{2}\right\rangle_2 \tag{7.32}$$

其中$|p\rangle$是动量本征态,式(7.32)的反傅里叶变换是

$$\left|\eta=\frac{\eta_1+i\eta_2}{\sqrt{2}}\right\rangle = e^{i\eta_1\eta_2/2}\int dp \mid p\rangle_1 \otimes \mid \eta_2-p\rangle_2 e^{-i\eta_1 p} \tag{7.33}$$

它显然满足 $(P_1+P_2)\mid\eta\rangle=\eta_2\mid\eta\rangle$,当测量第二个粒子的动量,即以$|p\rangle_{22}\langle p|$作用到$|\eta\rangle$上,计算得

$$ {}_2\langle p \mid \eta\rangle = \mid \eta_2-p\rangle_1 e^{ip\eta_1-i\eta_1\eta_2/2} \tag{7.34}$$

说明测量第二个粒子的动量,使第一个粒子处于$|\eta_2-p\rangle_1$ 态. 对照

式(7.31)可见,对第二个粒子作坐标测量,则第一个粒子也处于坐标本征态,而对第二个粒子作动量测量,第一个粒子也跟着处于动量本征态,而在测量时,两个粒子已相距遥远难通"音讯",第一个粒子无从知道第二个粒子是在测量坐标还是在测量动量,可见两者是"心有灵犀一点通"地纠缠在一起,"剪不断,理还乱".

近年来,随着 EPR 关联对思想的建立而引发了量子信息领域的理论探讨和技术研究热潮,使得纠缠态表象的建立和发展既有很好的理论价值,又有广泛的应用前景.其在量子力学、量子光学、量子信息中都有诸多的潜在应用.

## 7.5 用纠缠态表象讨论双模压缩算符

光在非线性介质中的参量下转换过程所输出的闲置光和信号光既组成双模压缩态,又相互纠缠,形成纠缠态.这给我们以启示,双模压缩态是否与两体连续纠缠态表象有关?为此我们用纠缠态表象构造如下的积分型算符,并用 IWOP 技术积分之,则有

$$\begin{aligned}
S_2 &= \int \frac{d^2\eta}{\pi\mu}\left|\frac{\eta}{\mu}\right\rangle\langle\eta| \\
&= \int \frac{d^2\eta}{\pi\mu} : \exp\left\{-\frac{|\eta|^2}{2}\left(1+\frac{1}{\mu^2}\right)+\eta\left(\frac{a_1^\dagger}{\mu}-a_2\right)+\eta^*\left(a_1-\frac{a_2^\dagger}{\mu}\right)+\right. \\
&\quad \left. a_1^\dagger a_2^\dagger + a_1 a_2 - a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2\right\} : \\
&= \exp(a_1^\dagger a_2^\dagger \tanh\lambda)\exp[(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1)\ln\operatorname{sech}\lambda] \\
&\quad \exp(-a_1 a_2 \tanh\lambda),
\end{aligned} \tag{7.35}$$

表明 $S_2$ 是双模压缩算符,式(7.35)也可写为

$$S_2 \equiv \frac{1}{\mu}\int \frac{d^2\eta}{\pi}\left|\frac{\eta}{\mu}\right\rangle\langle\eta| = \exp[\lambda(a_1^\dagger a_2^\dagger - a_2 a_1)],\ \mu = e^\lambda, \tag{7.36}$$

所以 $|\eta\rangle$ 给出了双模压缩算符的自然表示,且 $S_2$ 对 $|\eta\rangle$ 的压缩作用为

$$S_2 \mid \eta\rangle = \frac{1}{\mu}\left|\frac{\eta}{\mu}\right\rangle, \tag{7.37}$$

即双模压缩算符以与经典标度变换 $\eta \to \frac{\eta}{\mu}$ 对应的方式把 $|\eta\rangle$ 压缩为 $\frac{1}{\mu}|\eta/\mu\rangle$. 叙述到这里,我们自然想起 Dirac 回忆他与 Bohr 的一段交往时说的:"人们颇为着迷地听着 Bohr 讲话……在他给我以非常深刻的印象的同时,他的论证方式主要是定性的,我没有能够真正认出这些论证背后的事实. 我所想要的是可以用方程来表达的陈述,而 Bohr 的工作很难得给出这样的陈述. 我真的不能确定,我后来的工作在多大的程度上受到 Bohr 这些演讲的影响……可以肯定的是,他没有给我以直接的影响,因为他并不激励人家去构思新的方程."我们这里构思的式(7.35),将纠缠态表象与双模压缩算符自然地联系起来,是用方程来表达纠缠与压缩相联系的陈述的典型.

为了进一步理解 EPR 所提出的纠缠概念,我们用投影算符 $|q\rangle_{11}\langle q|$ 对双模压缩真空态的第一个模场施行正交振幅分量的测量,$|q\rangle_1$ 是坐标算符 $\hat{Q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + a_1^\dagger)$ 的本征态,为此要计算 ${}_1\langle q|S_2|00\rangle$,由式(7.36)得

$${}_1\langle q \mid S_2 \mid 00\rangle = {}_1\langle q \mid \int \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi\mu}\left|\frac{\eta}{\mu}\right\rangle\langle\eta \mid 00\rangle, \tag{7.38}$$

用 $\langle\eta \mid 00\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|\eta|^2}{2}}$ 和 $|\eta\rangle$ 的 Schmidt 分解式(7.30)得

$$\begin{aligned}
&{}_1\langle q \mid S_2 \mid 00\rangle \\
&= {}_1\langle q \mid \int \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi\mu}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\eta_1\eta_2}{\mu^2}}\int \mathrm{d}q' \mid q'\rangle \otimes \left|q' - \sqrt{2}\,\frac{\eta_1}{\mu}\right\rangle_2 \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\sqrt{2}\eta_2 q}{\mu}}\mathrm{e}^{-\frac{|\eta|^2}{2}} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi\mu}\mathrm{e}^{-\frac{|\eta|^2}{2}-\frac{\mathrm{i}\eta_1\eta_2}{\mu^2}}\left|q - \sqrt{2}\,\frac{\eta_1}{\mu}\right\rangle_2 \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\sqrt{2}\eta_2 q}{\mu}}
\end{aligned} \tag{7.39}$$

注意到 $\mathrm{d}^2\eta=\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\eta_2$，对 $\mathrm{d}\eta_2$ 积分后，得

$$
\begin{aligned}
&{}_1\langle q \mid S_2 \mid 00\rangle \\
&=\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}\eta_1}{\mu\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\frac{q^2}{\mu^2}+\sqrt{2}\,\frac{q\eta_1}{\mu^3}-\frac{\eta_1^2}{2\mu^4}-\frac{\eta_1^2}{2}\right\}\left|q-\sqrt{2}\,\frac{\eta_1}{\mu}\right\rangle_2 \\
&=\int\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{d}\eta_1}{\mu\pi^{\frac{3}{4}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\eta_1^2\left(1+\frac{1}{\mu^2}\right)^2+\sqrt{2}\,\eta_1\left[\frac{q}{\mu}\left(1+\frac{1}{\mu^2}\right)-\sqrt{2}\,\frac{a_2^\dagger}{\mu}\right]-\right. \\
&\left.\frac{q^2}{2}\left(1+\frac{2}{\mu^2}\right)+\sqrt{2}\,qa_2^\dagger-\frac{a_2^\dagger}{2}\right\}\mid 0\rangle_2 \\
&=\pi^{-\frac{1}{4}}\,\frac{2\mu}{1+\mu^2}\exp\left\{-\frac{q^2}{2}+\sqrt{2}\,qa_2^\dagger\left(1-\frac{2}{\mu^2+1}\right)-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\left(1-\right.\right. \\
&\left.\left.\frac{4\mu^2}{(\mu^2+1)^2}\right)\right\}\mid 0\rangle_2,
\end{aligned}
\tag{7.40}
$$

令 $\mu=\mathrm{e}^\gamma$，则有 $\operatorname{sech}\gamma=\dfrac{2\mu}{1+\mu^2}$，$\tanh\gamma=\dfrac{\mu^2-1}{\mu^2+1}$，式(7.40)化为

$$
\begin{aligned}
&{}_1\langle q \mid S \mid 00\rangle \\
&=\pi^{-\frac{1}{4}}\operatorname{sech}\gamma\exp\left(-\frac{q^2}{2}+\sqrt{2}\,qa_2^\dagger\tanh\gamma-\frac{a_2^{\dagger 2}}{2}\tanh\gamma\right)\mid 0\rangle_2
\end{aligned}
\tag{7.41}
$$

这是一个单模压缩态，由此可知，在对双模压缩真空态的第一模施行正交振幅分量测量后，第二模相应地塌缩到一个单模压缩态上. 可见用纠缠态表象推导${}_1\langle q\,|\,S_2\,|\,00\rangle$是很方便的；这启示我们，有关纠缠物理现象的解释用纠缠态表象来讨论较为直观，也容易解释清楚. 双模压缩算符在纠缠态表象中有如此简洁的表达式，也说明后者的引入是不可或缺的.

## 7.6 纠缠态与 Wigner 函数

对于一个双粒子纠缠系统，其两个粒子是如此地纠缠着，以至于没有一个粒子能单独成一个态. 换言之，处于纠缠态的粒子没有

自个独立的态，或者说甚至没有独立粒子的性质. 鉴于此，当仍要用 Wigner 函数来描写一个纠缠态时，此 Wigner 函数的边缘分布不应该反映独立粒子的性质而应该反映出整个系统所处的态呈现的纠缠性质. 也就是说，单粒子态的 Wigner 函数其边缘分布分别反映发现粒子处于位置 $q$ 和具有动量 $p$ 的几率，此种解释，必须作合理的改进和推广，才能适合于纠缠粒子系统(尤其是多粒子情况)，否则就将不再是物理的.

首先看纠缠 Wigner 算符是如何引进的，由两体纠缠态 $|\eta\rangle$ 与 $|\xi\rangle$ 的完备性式(7.1)和式(7.7)，知道

$$\int \frac{d^2\sigma}{\pi}\frac{d^2\gamma}{\pi} :\exp\{-|\sigma-(a_1-a_2^\dagger)|^2-|\gamma-(a_1+a_2^\dagger)|^2\}: = 1, \tag{7.42}$$

对照式(4.12)，有理由把其中的正规乘积形式的指数算符称为双模 Wigner 算符的纠缠形式，

$$\Delta(\sigma,\gamma)=\frac{1}{\pi^2}:\exp\{-|\sigma-(a_1-a_2^\dagger)|^2-|\gamma-(a_1+a_2^\dagger)|^2\}:, \tag{7.43}$$

因为若令 $\gamma=\alpha+\beta^*$, $\sigma=\alpha-\beta^*$，就有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi^2}:\exp\{-|\sigma-(a_1-a_2^\dagger)|^2-|\gamma-(a_1+a_2^\dagger)|^2\}:\\&=\frac{1}{\pi^2}:\exp[-2(\alpha^*-a_1^\dagger)(\alpha-a_1)-2(\beta^*-a_2^\dagger)(\beta-a_2)]:\\&=\Delta_1(\alpha,\alpha^*)\Delta_2(\beta,\beta^*),\end{aligned} \tag{7.44}$$

这样构造出来的 Wigner 算符，其边缘分布分别是

$$\begin{aligned}\int d^2\sigma\Delta(\sigma,\gamma)&=\frac{1}{\pi}:\exp\{-(\gamma-a_1-a_2^\dagger)(\gamma^*-a_1^\dagger-a_2)\}:\\&=\frac{1}{\pi}|\xi\rangle\langle\xi||_{\xi=\gamma}\end{aligned} \tag{7.45}$$

$$\int \mathrm{d}^2\gamma\Delta(\sigma,\gamma)=\frac{1}{\pi}\mid\eta\rangle\langle\eta\mid|_{\eta=\sigma} \tag{7.46}$$

相应的双粒子态$|\psi\rangle$的 Wigner 函数的边缘分布分别是

$$\int \mathrm{d}^2\sigma\langle\psi\mid\Delta(\sigma,\gamma)\mid\psi\rangle=\frac{1}{\pi}\mid\psi(\xi)\mid^2|_{\xi=\gamma} \tag{7.47}$$

$$\int \mathrm{d}^2\gamma\langle\psi\mid\Delta(\sigma,\gamma)\mid\psi\rangle=\frac{1}{\pi}\mid\psi(\eta)\mid^2|_{\eta=\sigma} \tag{7.48}$$

式中$|\psi(\xi)|^2$表示当纠缠双粒子系统处于态$|\psi\rangle$时，测量其处于相对动量$\sqrt{2}\xi_2$及质心坐标为$\sqrt{2}\xi_1$的几率，而$|\psi(\eta)|^2$表示测量其处于相对位置$\sqrt{2}\eta_1$与总动量为$\sqrt{2}\eta_2$的几率，也就是边缘分布反映了纠缠.

在$\langle\eta|$（由式(7.4)给出）表象中纠缠形式的 Wigner 算符是

$$\Delta(\sigma,\gamma)=\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi^3}\mid\sigma-\eta\rangle\langle\sigma+\eta\mid \mathrm{e}^{\eta\gamma^*-\eta^*\gamma} \tag{7.49}$$

而在$|\xi\rangle$表象中为

$$\Delta(\sigma,\gamma)=\int\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\pi^3}\mid-\xi+\gamma\rangle\langle\xi+\gamma\mid \mathrm{e}^{\xi\sigma^*-\xi^*\sigma} \tag{7.50}$$

用有序算符内的积分法积分式(7.49)和式(7.50)可以验证它们与式(7.43)相等.

## 7.7 纠缠态表象下的 Weyl 变换[2]

上节中我们"走捷径"给出了纠缠形式的 Wigner 算符，本节通过介绍$\langle\eta'|\hat{H}|\eta\rangle$的广义 Weyl 编序自然地给出描述双粒子纠缠态的 Wigner 算符及其很多重要性质.

### 7.7.1 $\langle\eta'|\hat{H}|\eta\rangle$的广义 Weyl 编序

对于$\langle\eta'\mid H(a_1^\dagger,a_2^\dagger,a_1,a_2)\mid\eta\rangle$这一矩阵元，引入广义的

Weyl 变换

$$h(\sigma, \gamma) = 4\int \frac{d^2\eta}{\pi} e^{\eta^*\gamma - \eta\gamma^*} \langle \sigma - \eta \mid H(a_1^\dagger, a_2^\dagger, a_1, a_2) \mid \sigma + \eta \rangle \tag{7.51}$$

由于 $\eta^*\gamma - \eta\gamma^*$ 是纯虚数，$e^{\eta^*\gamma - \eta\gamma^*}$ 是傅里叶变换核，式(7.51)的逆傅里叶变换即为

$$\langle \sigma - \eta \mid H(a_1^\dagger, a_2^\dagger, a_1, a_2) \mid \sigma + \eta \rangle = \int \frac{d^2\gamma}{4\pi} e^{\eta\gamma^* - \eta^*\gamma} h(\sigma, \gamma) \tag{7.52}$$

令 $\sigma + \eta = \sigma'$，$\sigma - \eta = \sigma''$ 则有

$$\langle \sigma'' \mid H(a_1^\dagger, a_2^\dagger, a_1, a_2) \mid \sigma' \rangle = \int \frac{d^2\gamma}{4\pi} \exp\left\{\frac{1}{2}[(\sigma' - \sigma'')\gamma^* - (\sigma'^* - \sigma''^*)\gamma]\right\} h\left(\frac{\sigma' + \sigma''}{2}, \gamma\right) \tag{7.53}$$

方程(7.53)的左边乘以 $\int \frac{d^2\sigma''}{\pi} \mid \sigma'' \rangle$，右边乘以 $\int \frac{d^2\sigma'}{\pi} \langle \sigma' \mid$，并利用纠缠态表象的完备性关系 $\int \frac{d^2\sigma}{\pi} \mid \sigma \rangle\langle \sigma \mid = 1$ 给出

$$H(a_1^\dagger, a_2^\dagger, a_1, a_2) = \int d^2\sigma'' \mid \sigma'' \rangle \int d^2\sigma' \langle \sigma' \mid \int \frac{d^2\gamma}{4\pi^3} e^{[(\sigma' - \sigma'')\gamma^* - (\sigma'^* - \sigma''^*)\gamma]/2} h\left(\frac{\sigma' + \sigma''}{2}, \gamma\right) \tag{7.54}$$

然后作积分变数变换 $d^2\sigma' d^2\sigma'' \to 4 d^2\sigma d^2\eta$ 得到

$$\begin{aligned} H(a_1^\dagger, a_2^\dagger, a_1, a_2) &= \frac{1}{\pi^3} \int d^2\gamma \int d^2\sigma d^2\eta h(\sigma, \gamma) e^{\eta\gamma^* - \eta^*\gamma} \mid \sigma - \eta \rangle\langle \sigma + \eta \mid \\ &= \int d^2\gamma \int d^2\sigma h(\sigma, \gamma) \Delta(\sigma, \gamma) \end{aligned} \tag{7.55}$$

其中定义了

$$\Delta(\sigma,\gamma)=\frac{1}{\pi^3}\int d^2\eta e^{\eta\gamma^*-\eta^*\gamma}|\sigma-\eta\rangle\langle\sigma+\eta| \tag{7.56}$$

这就是纠缠 Wigner 算符. 利用 IWOP 积分技术对式(7.56)进行积分将得到其正规乘积形式

$$\Delta(\sigma,\gamma)=\pi^{-2}:\exp[-|\sigma|^2-|\gamma|^2+\gamma(a_1^\dagger+a_2)+\gamma^*(a_2^\dagger+a_1)+\sigma(a_1^\dagger-a_2)+\sigma^*(a_1-a_2^\dagger)-2a_1^\dagger a_1-2a_2^\dagger a_2]: \tag{7.57}$$

如果取 $\gamma=\alpha+\beta^*$, $\sigma=\alpha-\beta^*$, $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}(q_1+\mathrm{i}p_1)$, $\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}(q_2+\mathrm{i}p_2)$，则看出它正是两个单模 Wigner 算符的乘积形式

$$\Delta(\sigma,\gamma)=\Delta(\alpha,\alpha^*)\Delta(\beta,\beta^*) \tag{7.58}$$

相应的密度算符 $\rho$ 的 Wigner 函数为

$$\mathrm{Tr}[\rho\Delta(\sigma,\gamma)]=W_\rho(\sigma,\gamma)=\int\frac{d^2\eta}{\pi^3}e^{\eta\gamma^*-\eta^*\gamma}\langle\sigma+\eta|\rho|\sigma-\eta\rangle \tag{7.59}$$

当取 $\rho=|\psi\rangle\langle\psi|$ 得

$$W(\sigma,\gamma)=\int\frac{d^2\eta}{\pi^3}\psi(\sigma+\eta)\psi^*(\sigma-\eta)e^{\eta\gamma^*-\eta^*\gamma} \tag{7.60}$$

对式(7.60)进行单边积分可以很清楚地看出其物理意义，即给出函数 $\psi(\sigma)$的几率分布

$$\int d^2\gamma W(\sigma,\gamma)=\int\frac{d^2\eta}{\pi}\psi(\sigma+\eta)\psi^*(\sigma-\eta)\delta(\eta)\delta(\eta^*)=\frac{1}{\pi}|\psi(\sigma)|^2 \tag{7.61}$$

更进一步，假设 $j(\zeta)$是 $\psi(\sigma)$的傅里叶积分变换

$$\psi(\sigma)=\int\frac{d^2\zeta}{2\pi}j(-\zeta)\exp[(\zeta^*\sigma-\zeta\sigma^*)/2] \tag{7.62}$$

将式(7.62)代入式(7.60)给出

$$W(\sigma,\gamma)=\int\frac{d^2\eta}{\pi^3}\frac{d^2\zeta}{2\pi}\frac{d^2\zeta'}{2\pi}j(-\zeta)j^*(-\zeta')\exp\left[\frac{(\zeta^*-\zeta'^*)\sigma-(\zeta-\zeta')\sigma^*}{2}\right]\times$$

$$\exp\left[\eta\left(\gamma^*+\frac{\zeta^*+\zeta'^*}{2}\right)-\eta^*\left(\gamma+\frac{\zeta+\zeta'}{2}\right)\right]$$

$$=\int\frac{d^2\zeta}{\pi^3}j(-\zeta)j^*(2\gamma+\zeta)\exp[\sigma(\gamma^*+\zeta^*)-\sigma^*(\gamma+\zeta)]$$

$$=\int\frac{d^2\zeta}{\pi^3}j(\gamma-\zeta)j^*(\gamma+\zeta)\exp(\zeta^*\sigma-\zeta\sigma^*)\tag{7.63}$$

那么接着作以下的单边积分

$$\int d^2\sigma W(\sigma,\gamma)=\int\frac{d^2\zeta}{\pi^3}j(\gamma-\zeta)j^*(\gamma+\zeta)\int d^2\sigma\exp(\zeta^*\sigma-\zeta\sigma^*)$$

$$=\int\frac{d^2\zeta}{\pi}j(\gamma-\zeta)j^*(\gamma+\zeta)\delta(\zeta)\delta(\zeta^*)=\frac{1}{\pi}\mid j(\zeta)\mid^2\tag{7.64}$$

给出了另一个几率分布.这就说明 $W(\sigma,\gamma)$是正确的纠缠 Wigner 函数.

### 7.7.2 纠缠情况下量子态的大小

利用式(7.56)及纠缠态表象的完备正交性质,可以证明

$$\mathrm{Tr}[\Delta(\sigma,\gamma)\Delta(\sigma',\gamma')]=\frac{1}{(2\pi)^2}\delta^2(\gamma-\gamma')\delta^2(\sigma-\sigma')\tag{7.65}$$

其中 $\delta^2(\gamma-\gamma')\equiv\delta(\gamma_1-\gamma_1')\delta(\gamma_2-\gamma_2')$, $\gamma=\gamma_1+i\gamma_2$. 根据纠缠态表象的正交性发现

$$\mathrm{Tr}(\rho_1\rho_2)=\int\frac{d^2\tau}{\pi}\langle\tau\mid\rho_1\rho_2\mid\tau\rangle=\int d^2\tau\int\frac{d^2\lambda}{\pi^2}\langle\tau\mid\rho_1\mid\lambda\rangle\langle\lambda\mid\rho_2\mid\tau\rangle\tag{7.66}$$

令 $\sigma+\eta=\tau$，$\sigma-\eta=\lambda$，$4\mathrm{d}^2\sigma\mathrm{d}^2\eta=\mathrm{d}^2\tau\mathrm{d}^2\lambda$，并利用

$$\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi^2}\exp(\eta\gamma^*-\eta^*\gamma)=\delta(\gamma)\delta(\gamma^*)\equiv\delta^2(\gamma) \qquad (7.67)$$

及式(7.60)，式(7.66)变为

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\rho_1\rho_2)&=4\int\mathrm{d}^2\sigma\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi^2}\langle\sigma+\eta\mid\rho_1\mid\sigma-\eta\rangle\langle\sigma-\eta\mid\rho_2\mid\sigma+\eta\rangle\\&=4\int\mathrm{d}^2\sigma\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\langle\sigma+\eta\mid\rho_1\mid\sigma-\eta\rangle\int\frac{\mathrm{d}^2\eta'}{\pi}\delta^2(\eta+\eta')\\&\quad\langle\sigma+\eta'\mid\rho_2\mid\sigma-\eta'\rangle\\&=4\int\mathrm{d}^2\sigma\mathrm{d}^2\gamma\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\langle\sigma+\eta\mid\rho_1\mid\sigma-\eta\rangle\exp(\eta\gamma^*-\eta^*\gamma)\times\\&\quad\int\frac{\mathrm{d}^2\eta'}{\pi^3}\langle\sigma+\eta'\mid\rho_2\mid\sigma-\eta'\rangle\exp(\eta'\gamma^*-\eta'^*\gamma)\\&=4\pi^2\int\mathrm{d}^2\sigma\mathrm{d}^2\gamma W_{\rho_1}(\sigma,\gamma)W_{\rho_2}(\sigma,\gamma) \qquad (7.68)\end{aligned}$$

特殊情况下，令 $\rho_1=|\psi\rangle\langle\psi|$，$\rho_2=|\phi\rangle\langle\phi|$，得到 Wigner 函数的迹相乘规则

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\rho_1\rho_2)&=|\langle\psi\mid\phi\rangle|^2=\left|\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\psi^*(\eta)\phi(\eta)\right|^2\\&=4\pi^2\int\mathrm{d}^2\sigma\mathrm{d}^2\gamma W_{|\psi\rangle}(\sigma,\gamma)W_{|\phi\rangle}(\sigma,\gamma) \qquad (7.69)\end{aligned}$$

可以看出，跃迁幅度 $|\langle\psi|\phi\rangle|^2$ 可以被表示为两个态的 Wigner 函数在相空间的乘积形式. 特别地，当 $\rho_1$ 和 $\rho_2$ 的取值可以使 $\mathrm{Tr}(\rho_1\rho_2)=0$，那么

$$\int\mathrm{d}^2\sigma\mathrm{d}^2\gamma W_{\rho_1}(\sigma,\gamma)W_{\rho_2}(\sigma,\gamma)=0 \qquad (7.70)$$

这告诉我们，Wigner 函数 $W_{\rho_1}(\sigma,\gamma)$ 和 $W_{\rho_2}(\sigma,\gamma)$ 中一定有取负值的，这也正是 Wigner 函数不能看做真正的几率分布函数的原

因. 当 $\rho_1 = \rho_2 = \rho$,并且考虑到 $\mathrm{Tr}(\rho^2) \leqslant 1$，方程(7.69)变为(复原$\hbar$)

$$4\pi^2\hbar^2 \leqslant \frac{1}{\int \mathrm{d}^2\varepsilon \mathrm{d}^2\gamma [W_\rho(\sigma, \gamma)]^2} \tag{7.71}$$

这是纠缠 Wigner 函数的一个很显著的特性.

### 7.7.3 Wigner 函数的上界

在$\langle\eta|$表象中定义如下的两个波函数

$$\exp(\eta^*\gamma - \eta\gamma^*)\psi(\sigma - \eta) = \phi_1(\eta), \ \psi(\sigma + \eta) = \phi_2(\eta) \tag{7.72}$$

利用纠缠态表象的完备性关系,Wigner 函数式(7.60)可以被改写为

$$\begin{aligned} W_\Psi(\sigma, \gamma) &= \frac{1}{\pi^2}\int \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\phi_1^*(\eta)\phi_2(\eta) = \frac{1}{\pi^2}\langle\phi_1 \mid \int \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi} \mid \eta\rangle\langle\eta \mid \phi_2\rangle \\ &= \frac{1}{\pi^2}\langle\phi_1 \mid \phi_2\rangle \end{aligned} \tag{7.73}$$

其中 $\phi_j(j = 1, 2)$ 的归一性由 $\psi$ 决定. 从式(7.73)可以得到

$$| W_\Psi(\sigma, \gamma) | = \frac{1}{\pi^2} | \langle\phi_1 \mid \phi_2\rangle | \tag{7.74}$$

再由 Schwarz 不等式

$$\begin{aligned} &| \langle\phi_1 \mid \phi_2\rangle |^2 \\ &= \left|\int \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\phi_1^*(\eta)\phi_2(\eta)\right|^2 \leqslant \int \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi} | \phi_1(\eta) |^2 \cdot \int \frac{\mathrm{d}^2\eta'}{\pi} | \phi_2(\eta') |^2 \\ &= 1 \end{aligned} \tag{7.75}$$

可以给出纠缠 Wigner 函数的上界为(复原$\hbar$)

$$|W_\Psi(\sigma,\gamma)|\leqslant\frac{1}{\pi^2\hbar^2} \tag{7.76}$$

所以一个归一化的纯态的纠缠 Wigner 函数的取值不大于$\frac{1}{\pi^2\hbar^2}$.

## 7.8 纠缠形式的 Wigner 算符的 Weyl 编序

既然有了纠缠的 Wigner 算符，Weyl 变换也应该推广到双模形式，对照第 4 章式(4.9)，纠缠的 Weyl 变换为

$$F(Q_1,P_1,Q_2,P_2)=\int d^2\sigma d^2\gamma f(\sigma,\gamma)\Delta(\sigma,\gamma) \tag{7.77}$$

其中 $f(\sigma,\gamma)$是 $F(Q_1,P_1,Q_2,P_2)$的经典对应函数. 现在也可以将第 4 章的任意算符的 Weyl 编序展开式推广到双模情况

$$\rho=4\int\frac{d^2\beta_1 d^2\beta_2}{\pi^2}\,\vdots\,\langle-\beta_1,-\beta_2|\rho|\beta_1,\beta_2\rangle\times \exp\left[\sum_{j=1}^{2}2(\beta_j^* a_j-\beta_j a_j^\dagger+a_j^\dagger a_j)\right]\vdots, \tag{7.78}$$

再将式(7.43)代入到式(7.78)，可以得到 $\Delta(\sigma,\gamma)$的 Weyl 编序：

$$\Delta(\sigma,\gamma)=\,\vdots\,\delta(a_1-a_2^\dagger-\sigma)\delta(a_1^\dagger-a_2-\sigma^*)\times \delta(a_1+a_2^\dagger-\gamma)\delta(a_1^\dagger+a_2-\gamma^*)\,\vdots. \tag{7.79}$$

再利用 Weyl 编序算符内的积分技术则有

$$\vdots\,f(Q_1,P_1,Q_2,P_2)\,\vdots=\iint d^2\sigma d^2\gamma f(\sigma,\gamma)\Delta(\sigma,\gamma). \tag{7.80}$$

可见 Weyl 编序形式十分简洁，对于研究量子 Tomography 理论带来方便，在后面的章节会给出详细介绍.

## 7.9 介观 LC 电路中热真空态的 Wigner 函数及物理意义[3]

作为上节的应用，我们求介观 LC 电路中热真空态的 Wigner 函数及其物理意义.

### 7.9.1 有限温度下介观 LC 电路的真空态

热场动力学(TFD)是 1975 年 Umezawa 和 Takahashi 等[4]，为了把处于非零温度时的系综平均值等价地转换为对于一个纯态的期望值而引进的，即将算符 $A$ 的系综平均值

$$\langle A\rangle = Z^{-1}(\beta)\mathrm{Tr}(A\mathrm{e}^{-\beta H}) \tag{7.81}$$

代之以

$$\langle A\rangle = \langle 0(\beta)\mid A\mid 0(\beta)\rangle \tag{7.82}$$

这里$|0(\beta)\rangle$是个纯态，$\beta=(kT)^{-1}$，$k$ 是玻尔兹曼常数，$Z(\beta)=\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-\beta H})$ 是系综的配分函数，$H$ 是所考虑系统的哈密顿量. 式(7.81)转化为式(7.82)的方便性是以引入一个虚态矢为代价的，也就是说，对于每一个现实物理态矢$|n\rangle$要引进一个虚态矢$|\tilde{n}\rangle$相伴，$|\tilde{n}\rangle$与$|n\rangle$分属不同的矢量空间，它们相互独立. 相应地，对每一个现实的算符 $a$，也要引进在虚空间中作用的算符$\tilde{a}$. 对于 $H_0=\omega a^\dagger a$ 的谐振子系统，Umezawa 与 Takahashi 指出

$$|\,0(\beta)\rangle = \exp(a^\dagger\,\tilde{a}^\dagger\tanh\theta)\mid 0,\,\tilde{0}\rangle = S(\theta)\mid 0,\,\tilde{0}\rangle \tag{7.83}$$

$\tanh\theta=\mathrm{e}^{-\hbar\omega/(2kT)}=\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega/2}$，$|\,0(\beta)\rangle$ 为热真空态，$|\,0,\,\tilde{0}\rangle$ 被 $a$ 与$\tilde{a}$湮灭，$S(\theta)$ 被称为热算符，它把零温度下的真空 $|\,0,\,\tilde{0}\rangle$ 变为热真空 $|\,0(\beta)\rangle$，

$$S(\theta) \equiv \exp[\theta(a\tilde{a} - a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger})] \tag{7.84}$$

在有限温度下，介观 LC 电路的真空态变为热真空态. 为了研究它，可以引入相干热态[5]

$$|\tau\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\tau|^2 + \tau a^{\dagger} - \tau^* \tilde{a}^{\dagger} + a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger}\right)|0, \tilde{0}\rangle \tag{7.85}$$

它具有正交完备性，

$$\int \frac{d^2\tau}{\pi}|\tau\rangle\langle\tau| = 1,\ \langle\tau'|\tau\rangle = \pi\delta(\tau-\tau')\delta(\tau^*-\tau'^*) \tag{7.86}$$

因而构成一个表象. 在此表象内，热算符 $S(\theta)$表示为，

$$S(\theta) = \int \frac{d^2\tau}{\mu\pi}|\tau/\mu\rangle\langle\tau|,\ \mu^2 = \frac{1+\tanh\theta}{1-\tanh\theta} \tag{7.87}$$

由此可以看出 $S(\theta)$将$|\tau\rangle$“压缩”为

$$S(\theta)|\tau\rangle = 1/\mu\,|\tau/\mu\rangle \tag{7.88}$$

$$|0(\beta)\rangle = \int \frac{d^2\tau}{\mu\pi}|\tau/\mu\rangle\langle\tau|0, \tilde{0}\rangle = \int \frac{d^2\tau}{\mu\pi}|\tau/\mu\rangle e^{-\frac{1}{2}|\tau|^2} \tag{7.89}$$

换言之，$|\tau\rangle$的引进使热算符有了一个更自然的表示，这对于研究 LC 电路的热动力学演化等带来了极大的便利.

### 7.9.2 热场 Wigner 算符

已知密度算符的 Wigner 函数定义为

$$W(p, q) = \mathrm{Tr}(\rho\Delta(p, q)) \tag{7.90}$$

其中 $\Delta(p, q)$是 Wigner 算符，由于满足完备性关系，任意算符 $A$ 可用 $\Delta(p, q)$展开，所以 $\Delta(p, q)$还是 Weyl 对应的变换核，

$$A = \int \mathrm{d}p\mathrm{d}q \Delta(p, q) \mathscr{A}(p, q) \tag{7.91}$$

故热真空态下任意算符 $A$ 的期望值是

$$\langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle = \int \mathrm{d}p\mathrm{d}q \mathscr{A}(p, q) \langle 0(\beta) | \Delta(p, q) | 0(\beta) \rangle \tag{7.92}$$

其中

$$\langle 0(\beta) | \Delta(p, q) | 0(\beta) \rangle = W_{\mathrm{T}}(p, q) \tag{7.93}$$

被称为热真空态的 Wigner 函数，下脚标“T”代表“热场”. 所以一混合态的 Wigner 函数可以等价于 $\langle 0(\beta) | \Delta(p, q) | 0(\beta) \rangle$. 根据相干热态表象，我们引入热场 Wigner 算符，

$$\Delta_{\mathrm{T}}(\sigma, \gamma) = \int \frac{\mathrm{d}^2 \tau}{\pi} | \sigma - \tau \rangle \langle \sigma + \tau | \exp(\tau \gamma^* - \gamma \tau^*) \tag{7.94}$$

$$\gamma = \alpha + \varepsilon^*, \ \sigma = \alpha - \varepsilon^*, \ \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + \mathrm{i}p) \tag{7.95}$$

由 IWOP 积分技术以及式(7.93)，得到 $\Delta_{\mathrm{T}}(\sigma, \gamma)$ 的正规乘积形式

$$\Delta_{\mathrm{T}}(\sigma, \gamma) = \pi^{-2} : \exp[-2(a^\dagger - \alpha^*)(a - \alpha) - 2(\tilde{a}^\dagger - \varepsilon^*)(\tilde{a} - \varepsilon)] : \tag{7.96}$$

$\Delta_{\mathrm{T}}(\sigma, \gamma)$ 与一般 Wigner 算符 $\Delta(p, q)$ 的关系是

$$2\mathrm{Tr}_{\sim} [\Delta_{\mathrm{T}}(\sigma, \gamma)] = \Delta(p, q) = 2\int \mathrm{d}^2 \varepsilon \Delta_{\mathrm{T}}(\sigma, \gamma) \tag{7.97}$$

其中 $\mathrm{Tr}_{\sim}$ 表示只对“～”自由度求迹.

### 7.9.3 热真空态的 Wigner 函数

由方程(7.86)，(7.87)和(7.94)，得到

$$S^{-1}(\theta)\Delta_T(\sigma, \gamma)S(\theta) = \Delta_T(\gamma/\mu, \mu\sigma), \tanh\theta = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} \tag{7.98}$$

根据式(7.98),计算热真空态的 Wigner 函数为

$$\begin{aligned}
W_T(p, q) &= \langle 0(\beta) \mid \Delta(p, q) \mid 0(\beta)\rangle \\
&= 2\int d^2\varepsilon\langle 0, \tilde{0} \mid S^{-1}(\theta)\Delta_T(\sigma, \gamma)S(\theta) \mid 0, \tilde{0}\rangle \\
&= 2\int \frac{d^2\varepsilon}{\pi^2}\exp\left(-\mid\sigma\mid^2\mu^2 - \frac{\mid\gamma\mid^2}{\mu^2}\right) \\
&= 2\int \frac{d^2\varepsilon}{\pi^2}\exp\left[(\varepsilon\alpha + \varepsilon^*\alpha^*)\left(\mu^2 - \frac{1}{\mu^2}\right) - \right. \\
&\quad \left.(\mid\varepsilon\mid^2 + \mid\alpha\mid^2)\frac{\mu^4 + 1}{\mu^2}\right] \\
&= \frac{2\mu^2}{\pi(\mu^4 + 1)}\exp\left(\frac{-4\mu^2}{\mu^4 + 1}\mid\alpha\mid^2\right) \\
&= \frac{2\mu^2}{\pi(\mu^4 + 1)}\exp\left(\frac{-2\mu^2}{\mu^4 + 1}(q^2 + p^2)\right)
\end{aligned} \tag{7.99}$$

由于

$$\frac{2\mu^2}{\mu^4 + 1} = \frac{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}{1 + e^{-\beta\hbar\omega}}, \tanh\theta = \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{2kT}\right) \tag{7.100}$$

所以 $W_T(p, q)$的形式为

$$W_T(p, q) = \frac{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}{\pi(1 + e^{-\beta\hbar\omega})}\exp\left[-\frac{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}{1 + e^{-\beta\hbar\omega}}(q^2 + p^2)\right] \tag{7.101}$$

### 7.9.4 介观电路热真空态 Wigner 函数的边缘分布

在坐标和动量相空间,介观电路热真空态 Wigner 函数的边缘分布分别为

$$\int dq W_T(p, q) = \sqrt{\frac{1-e^{-\beta\hbar\omega}}{\pi(1+e^{-\beta\hbar\omega})}} \exp\left[-\frac{1-e^{-\beta\hbar\omega}}{1+e^{-\beta\hbar\omega}} p^2\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \tanh^{1/2}(\beta\hbar\omega/2) \exp[-p^2 \tanh(\beta\hbar\omega/2)] \tag{7.102}$$

和

$$\int dp W_T(p, q) = \sqrt{\frac{1-e^{-\beta\hbar\omega}}{\pi(1+e^{-\beta\hbar\omega})}} \exp\left[-\frac{1-e^{-\beta\hbar\omega}}{1+e^{-\beta\hbar\omega}} q^2\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \tanh^{1/2}(\beta\hbar\omega/2) \exp[-q^2 \tanh(\beta\hbar\omega/2)] \tag{7.103}$$

其中

$$\tanh\theta = e^{-\hbar\omega/(2kT)} = e^{-\beta\hbar\omega/2} \tag{7.104}$$

量子化 LC 电路的哈密顿量为 $H = \frac{P^2}{2L} + \frac{Q^2}{2C}$，$Q^2$ 和 $P^2$ 的 Weyl 对应分别是

$$Q^2 \to \frac{\hbar(\alpha+\alpha^*)^2}{2\omega L},\ P^2 \to -\frac{\hbar\omega L(\alpha-\alpha^*)^2}{2},\ \omega^2 = (LC)^{-1} \tag{7.105}$$

所以储存在电容里的能量是

$$\langle 0(\beta) | \frac{Q^2}{2C} | 0(\beta)\rangle$$
$$= \frac{1}{2C}\int dp dq \frac{\hbar(\alpha+\alpha^*)^2}{2\omega L} \langle 0(\beta) | \Delta(p, q) | 0(\beta)\rangle$$
$$= \frac{1}{2C}\int dq \frac{\hbar(\alpha+\alpha^*)^2}{2\omega L} \int dp W_T(p, q)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\omega LC} \tanh^{1/2}(\beta\hbar\omega/2) \int dq q^2 \exp[-q^2 \tanh(\beta\hbar\omega/2)]$$

$$
= \frac{\hbar\omega}{4}\coth\frac{\beta\hbar\omega}{2} \tag{7.106}
$$

储存在电感里的能量是

$$
\begin{aligned}
&\langle 0(\beta) \mid \frac{P^2}{2L} \mid 0(\beta)\rangle \\
&= -\frac{1}{2L}\int \mathrm{d}p\mathrm{d}q\,\frac{\hbar\omega L(\alpha+\alpha^*)^2}{2}\langle 0(\beta) \mid \Delta(p,q) \mid 0(\beta)\rangle \\
&= -\frac{1}{2L}\int \mathrm{d}q\,\frac{\hbar\omega L(\alpha-\alpha^*)^2}{2}\int \mathrm{d}p W_{\mathrm{T}}(p,q) \\
&= \frac{\hbar\omega}{2\sqrt{\pi}}\tanh^{1/2}(\beta\hbar\omega/2)\int \mathrm{d}p p^2\exp[-p^2\tanh(\beta\hbar\omega/2)] \\
&= \frac{\hbar\omega}{4}\coth\frac{\beta\hbar\omega}{2}
\end{aligned} \tag{7.107}
$$

所以处于热真空态的能量为

$$
H = \frac{\hbar\omega}{2}\coth\frac{\beta\hbar\omega}{2} \tag{7.108}
$$

也是系统的热零点能.

以上讨论赋予 Wigner 函数以新的物理意义,即它的边缘分布对于$\frac{q^2}{2C}$和$\frac{p^2}{2L}$的统计平均分别是介观 LC 电路储存在电容和电感里的能量.

## 7.10 三模纠缠态表象及其压缩

观察方程(7.6),可见$|\eta\rangle$是属于$(Q_1-Q_2)$和$(P_1+P_2)$的本征态,而$(Q_1-Q_2)$和$(P_1+P_2)$是通过正交矩阵$\boldsymbol{R}_2$ 和$\begin{pmatrix}Q_1\\Q_2\end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}$相联系的,$\boldsymbol{R}_2$ 的形式为

$$\boldsymbol{R}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

本节将此矩阵推广到 $3\times 3$ 的情况，

$$\boldsymbol{R}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

由此给出

$$\boldsymbol{R}_3 \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}(Q_1 - 2Q_2 + Q_3) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - Q_3) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(Q_1 + Q_2 + Q_3) \end{pmatrix}$$

和
$$\boldsymbol{R}_3 \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}(P_1 - 2P_2 + P_3) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(P_1 - P_3) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(P_1 + P_2 + P_3) \end{pmatrix}$$

所以以下我们讨论三体算符

$$\{(Q_1 - Q_3), (Q_1 + Q_2 + Q_3), (P_1 - 2P_2 + P_3)\} \tag{7.109}$$

的共同本征态 $|\rho, \chi_1, \chi_2\rangle$ 及其共轭态 $|\chi, \rho_1, \rho_2\rangle$，后者是算符 $\{(P_1 - P_3), (P_1 + P_2 + P_3), (Q_1 - 2Q_2 + Q_3)\}$ 的共同本征态. 利

用和求式(7.1)同样的方法可得到$|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle$为

$$
\begin{aligned}
&|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle \\
&=\frac{1}{\sqrt{6}\,\pi^{3/4}}\exp\Big[-\frac{1}{12}\rho^2-\frac{1}{4}\chi_1^2-\frac{1}{6}\chi_2^2+\frac{\sqrt{2}}{6}\mathrm{i}\rho(a_1^\dagger-2a_2^\dagger+a_3^\dagger)+ \\
&\frac{\sqrt{2}}{2}\chi_1(a_1^\dagger-a_3^\dagger)+\frac{\sqrt{2}}{3}\chi_2(a_1^\dagger+a_2^\dagger+a_3^\dagger)-\frac{1}{6}(2a_1^{\dagger 2}-a_2^{\dagger 2}+2a_3^{\dagger 2})- \\
&\frac{1}{3}(2a_1^\dagger a_2^\dagger-a_1^\dagger a_3^\dagger+2a_2^\dagger a_3^\dagger)\Big]|000\rangle
\end{aligned}
\tag{7.110}
$$

把$a_j$，$j=1,2,3$分别作用到$|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle$得

$$
\begin{aligned}
&a_1|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle \\
&=\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\mathrm{i}\rho+\frac{\sqrt{2}}{2}\chi_1+\frac{\sqrt{2}}{3}\chi_2-\frac{2}{3}a_1^\dagger-\frac{2}{3}a_2^\dagger+\frac{1}{3}a_3^\dagger\right)|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle
\end{aligned}
\tag{7.111}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_2|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle \\
&=\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{i}\rho+\frac{\sqrt{2}}{3}\chi_2+\frac{1}{3}a_2^\dagger-\frac{2}{3}a_1^\dagger-\frac{2}{3}a_3^\dagger\right)|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle
\end{aligned}
\tag{7.112}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_3|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle \\
&=\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\mathrm{i}\rho-\frac{\sqrt{2}}{2}\chi_1+\frac{\sqrt{2}}{3}\chi_2+\frac{1}{3}a_1^\dagger-\frac{2}{3}a_2^\dagger-\frac{2}{3}a_3^\dagger\right)|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle
\end{aligned}
\tag{7.113}
$$

从而可见

$$(Q_1+Q_2+Q_3)|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle=\chi_2|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle \tag{7.114}$$

$$(Q_1-Q_3)|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle=\chi_1|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle \tag{7.115}$$

$$(P_1-2P_2+P_3)|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle=\rho|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle \tag{7.116}$$

这就证明了我们的结论：$|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle$是算符式(7.109)的共同本征

态. 利用 IWOP 积分技术以及三模真空投影算符的正规乘积形式

$$|000\rangle\langle 000| = :\exp(-a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2 - a_3^\dagger a_3): \quad (7.117)$$

可给出 $|\rho, \chi_1, \chi_2\rangle$ 的完备性关系：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{6\pi^{3/2}}\iiint \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\chi_1\,\mathrm{d}\chi_2\,|\rho, \chi_1, \chi_2\rangle\langle\rho, \chi_1, \chi_2| \\
&= \frac{1}{6\pi^{3/2}}\iiint \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\chi_1\,\mathrm{d}\chi_2 : \exp\Big[-\frac{1}{6}\rho^2 - \frac{1}{2}\chi_1^2 - \frac{1}{3}\chi_2^2 + \\
&\frac{\sqrt{2}}{6}\mathrm{i}\rho(a_1^\dagger - 2a_2^\dagger + a_3^\dagger - a_1 + 2a_2 - a_3) + \frac{\sqrt{2}}{2}\chi_1(a_1^\dagger - \\
&a_3^\dagger + a_1 + a_3) + \frac{\sqrt{2}}{3}\chi_2(a_1^\dagger + a_2^\dagger + a_3^\dagger + a_1 + a_2 + a_3) - \\
&\frac{1}{6}(2a_1^{\dagger 2} - a_2^{\dagger 2} + 2a_3^{\dagger 2} + 2a_1^2 - a_2^2 + 2a_3^2) - \\
&\frac{1}{3}(2a_1^\dagger a_2^\dagger - a_1^\dagger a_3^\dagger + 2a_2^\dagger a_3^\dagger + 2a_1 a_2 - a_1 a_3 + a_2 a_3) - a_1^\dagger a_1 - \\
&a_2^\dagger a_2 - a_3^\dagger a_3\Big]: \\
&= 1 \qquad (7.118)
\end{aligned}$$

由本征方程(7.114)到(7.116),可得

$$\begin{aligned}
&\langle\rho', \chi_1', \chi_2'|(Q_1 - Q_3)|\rho, \chi_1, \chi_2\rangle \\
&= \chi_1'\langle\rho', \chi_1', \chi_2'|\rho, \chi_1, \chi_2\rangle \\
&= \chi_1\langle\rho', \chi_1', \chi_2'|\rho, \chi_1, \chi_2\rangle \qquad (7.119)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\langle\rho', \chi_1', \chi_2'|(Q_1 + Q_2 + Q_3)|\rho, \chi_1, \chi_2\rangle \\
&= \chi_2'\langle\rho', \chi_1', \chi_2'|\rho, \chi_1, \chi_2\rangle \\
&= \chi_2\langle\rho', \chi_1', \chi_2'|\rho, \chi_1, \chi_2\rangle \qquad (7.120)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\langle\rho', \chi_1', \chi_2'|(P_1 - 2P_2 + P_3)|\rho, \chi_1, \chi_2\rangle \\
&= \rho'\langle\rho', \chi_1', \chi_2'|\rho, \chi_1, \chi_2\rangle \\
&= \rho\langle\rho', \chi_1', \chi_2'|\rho, \chi_1, \chi_2\rangle \qquad (7.121)
\end{aligned}$$

所以有

$$\langle \rho', \chi_1', \chi_2' | \rho, \chi_1, \chi_2 \rangle = \delta(\rho' - \rho)\delta(\chi_1' - \chi_1)\delta(\chi_2' - \chi_2) \tag{7.122}$$

$|\rho, \chi_1, \chi_2\rangle$是正交的. 为了揭示$|\rho, \chi_1, \chi_2\rangle$的纠缠特性,我们做$|\rho, \chi_1, \chi_2\rangle$的傅里叶变换

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int d\rho e^{-iq\rho} | \rho, \chi_1, \chi_2 \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| q + \frac{1}{2}\chi_1 + \frac{1}{3}\chi_2 \right\rangle_1 \otimes \left| -2q + \frac{1}{3}\chi_2 \right\rangle_2 \otimes \\
&\quad \left| q - \frac{1}{2}\chi_1 + \frac{1}{3}\chi_2 \right\rangle_3
\end{aligned} \tag{7.123}$$

它的逆变换即为

$$\begin{aligned}
| \rho, \chi_1, \chi_2 \rangle = &\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\rho\left(\frac{1}{2}\chi_1 + \frac{1}{3}\chi_2\right)} \int dq\, | q\rangle_1 \otimes \\
&| -2q + \chi_1 + \chi_2 \rangle_2 \otimes | q - \chi_1 \rangle_3 e^{iq\rho}
\end{aligned} \tag{7.124}$$

这个方程被称为$|\rho, \chi_1, \chi_2\rangle$的 Schmidt 分解,它告诉我们,当测量得粒子 1 处于态$|q\rangle$时,粒子 2 就坍塌到$|-2q+\chi_1+\chi_2\rangle$,而粒子 3 则处于$|q-\chi_1\rangle$,所以$|\rho, \chi_1, \chi_2\rangle$是三粒子纠缠态.

同样的方法可得$|\rho, \chi_1, \chi_2\rangle$的共轭态$|\chi, \rho_1, \rho_2\rangle$

$$\begin{aligned}
&| \chi, \rho_1, \rho_2 \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}\pi^{3/4}} \exp\left[ -\frac{1}{12}\chi^2 - \frac{1}{4}\rho_1^2 - \frac{1}{6}\rho_2^2 + \frac{\sqrt{2}}{6}\chi(a_1^\dagger - 2a_2^\dagger + a_3^\dagger) + \right. \\
&\quad \frac{\sqrt{2}}{2} i\rho_1 (a_1^\dagger - a_3^\dagger) + \frac{\sqrt{2}}{3} i\rho_2 (a_1^\dagger + a_2^\dagger + a_3^\dagger) + \frac{1}{6}(2a_1^{\dagger 2} - a_2^{\dagger 2} + 2a_3^{\dagger 2}) + \\
&\quad \left. \frac{1}{3}(2a_1^\dagger a_2^\dagger - a_1^\dagger a_3^\dagger + 2a_2^\dagger a_3^\dagger) \right] | 000 \rangle
\end{aligned} \tag{7.125}$$

它满足本征方程

$$(P_1+P_2+P_3)\mid\chi,\rho_1,\rho_2\rangle=\rho_2\mid\chi,\rho_1,\rho_2\rangle \tag{7.126}$$

$$(P_1-P_3)\mid\chi,\rho_1,\rho_2\rangle=\rho_1\mid\chi,\rho_1,\rho_2\rangle \tag{7.127}$$

$$(Q_1-2Q_2+Q_3)\mid\chi,\rho_1,\rho_2\rangle=\chi\mid\chi,\rho_1,\rho_2\rangle \tag{7.128}$$

其 Schmidt 分解形式为

$$\begin{aligned}\mid\chi,\rho_1,\rho_2\rangle=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\chi\left(\frac{1}{2}\rho_1+\frac{1}{3}\rho_2\right)}\int d\rho\mid p\rangle_1\otimes\\&\mid-2p+\rho_1+\rho_2\rangle_2\otimes\mid p-\rho_1\rangle_3 e^{-i\chi p}\end{aligned} \tag{7.129}$$

利用

$${}_j\langle q\mid p\rangle_j=(2\pi)^{-1/2}e^{iq_jp_j},\ j=1,2,3 \tag{7.130}$$

很容易求出$|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle$和$|\chi,\rho_1,\rho_2\rangle$的内积为

$$\begin{aligned}&\langle\rho,\chi_1,\chi_2\mid\chi,\rho_1,\rho_2\rangle\\&=\frac{1}{6}(2\pi)^{-3/2}\exp\left(-\frac{1}{6}i\rho\chi+\frac{1}{2}i\chi_1\rho_1+\frac{1}{3}i\chi_2\rho_2\right)\end{aligned} \tag{7.131}$$

和前面章节一样,用三模纠缠态表象构造如下的积分型算符

$$S_3=\frac{1}{\mu^{3/2}}\iiint d\rho d\chi_1 d\chi_2\left|\frac{\rho}{\mu},\frac{\chi_1}{\mu},\frac{\chi_2}{\mu}\right\rangle\langle\rho,\chi_1,\chi_2\mid \tag{7.132}$$

利用 IWOP 积分技术可以将积分求出,

$$\begin{aligned}S_3=2\sqrt{2}\left(\frac{\mu}{\mu^2+1}\right)^{3/2}:\exp\Big[&-\left(1-\frac{2\mu}{\mu^2+1}\right)(a_1a_1^\dagger+a_2a_2^\dagger+a_3a_3^\dagger)-\\&\frac{1}{6}\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}(2a_1^{\dagger2}-a_2^{\dagger2}+2a_3^{\dagger2}+4a_1^\dagger a_2^\dagger-2a_1^\dagger a_3^\dagger+4a_2^\dagger a_3^\dagger)+\\&\frac{1}{6}\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}(2a_1^2-a_2^2+2a_3^2+4a_1a_2-2a_1a_3+4a_2a)\Big]:\end{aligned} \tag{7.133}$$

令 $\mu = e^{\lambda}$，$\tanh\lambda = \dfrac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1}$，$\operatorname{sech}\lambda = \dfrac{2\mu}{\mu^2 + 1}$ 得

$$S_3 = (\operatorname{sech}\lambda)^{3/2} : \exp\Big[-(1-\operatorname{sech}\lambda)(a_1 a_1^\dagger + a_2 a_2^\dagger + a_3 a_3^\dagger) - \frac{1}{6}\tanh\lambda(2a_1^{\dagger 2} - a_2^{\dagger 2} + 2a_3^{\dagger 2} + 4a_1^\dagger a_2^\dagger - 2a_1^\dagger a_3^\dagger + 4a_2^\dagger a_3^\dagger) + \frac{1}{6}\tanh\lambda(2a_1^2 - a_2^2 + 2a_3^2 + 4a_1 a_2 - 2a_1 a_3 + 4a_2 a)\Big]: \tag{7.134}$$

再由算符公式(2.41)，则 $S_3$ 化为

$$S_3 = \exp(A^\dagger \tanh\lambda)\exp(B\ln\operatorname{sech}\lambda)\exp(-A\tanh\lambda) \tag{7.135}$$

其中

$$A^\dagger \equiv -\frac{1}{6}(2a_1^{\dagger 2} - a_2^{\dagger 2} + 2a_3^{\dagger 2} + 4a_1^\dagger a_2^\dagger - 2a_1^\dagger a_3^\dagger + 4a_2^\dagger a_3^\dagger) \tag{7.136}$$

$$B \equiv a_1 a_1^\dagger + a_2 a_2^\dagger + a_3 a_3^\dagger \tag{7.137}$$

组成封闭的 SU(1，1)李代数，

$$[A^\dagger, B] = -2A^\dagger,\ [B, A] = -2A,\ [A^\dagger, A] = -B \tag{7.138}$$

那么由式(7.122)和式(7.132)很明显看出 $S_3$ 的压缩性质

$$S_3 \mid \rho, \chi_1, \chi_2\rangle = \frac{1}{\mu^{3/2}}\left| \frac{\rho}{\mu}, \frac{\chi_1}{\mu}, \frac{\chi_2}{\mu}\right\rangle \tag{7.139}$$

利用 Baker-Hausdorff 公式

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \cdots \tag{7.140}$$

可以求出下面的关系式，

$$S_3 a_1 S_3^{-1} = a_1 \cosh\lambda + \frac{1}{3}(2a_1^\dagger + 2a_2^\dagger - a_3^\dagger)\sinh\lambda \tag{7.141}$$

$$S_3 a_2 S_3^{-1} = a_2 \cosh\lambda + \frac{1}{3}(2a_1^\dagger + 2a_3^\dagger - a_2^\dagger)\sinh\lambda \quad (7.142)$$

$$S_3 a_3 S_3^{-1} = a_3 \cosh\lambda + \frac{1}{3}(2a_3^\dagger + 2a_2^\dagger - a_1^\dagger)\sinh\lambda \quad (7.143)$$

引入两个正交相，

$$Q_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{j=1}^{3} Q_j,\ P_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{j=1}^{3} P_j,\ [Q_0,\ P_0] = \frac{\mathrm{i}}{2} \quad (7.144)$$

并利用式(7.141)～式(7.143)得到

$$S_3 Q_0 S_3^{-1} = \mathrm{e}^{\lambda} Q_0,\ S_3 P_0 S_3^{-1} = \mathrm{e}^{-\lambda} P_0 \quad (7.145)$$

另一方面将 $S_3$，即式(7.135)，作用到三模压缩真空态

$$S_3 \mid 000\rangle = (\mathrm{sech}\,\lambda)^{3/2} \exp(A^\dagger \tanh\lambda) \mid 000\rangle \quad (7.146)$$

就可以求出两光场的正交相在态 $S_3|000\rangle$ 的量子起伏

$$\begin{aligned} \langle (\Delta Q_0)^2 \rangle &= \langle 000 \mid S_3^{-1} Q_0^2 S_3 \mid 000\rangle \\ &= \langle 000 \mid \mathrm{e}^{2\lambda} Q_0^2 \mid 000\rangle = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\lambda} \end{aligned} \quad (7.147)$$

$$\begin{aligned} \langle (\Delta P_0)^2 \rangle &= \langle 000 \mid S_3^{-1} P_0^2 S_3 \mid 000\rangle \\ &= \langle 000 \mid \mathrm{e}^{-2\lambda} P_0^2 \mid 000\rangle = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2\lambda} \end{aligned} \quad (7.148)$$

鉴于

$$\begin{aligned} \langle \Delta Q_0 \rangle &= \langle 000 \mid S_3^{-1} Q_0 S_3 \mid 000\rangle = 0, \\ \langle \Delta P_0 \rangle &= \langle 000 \mid S_3^{-1} P_0 S_3 \mid 000\rangle = 0 \end{aligned} \quad (7.149)$$

所以测不准关系为

$$\Delta Q_0 \Delta P_0 \equiv \sqrt{\langle (\Delta Q_0)^2 \rangle \langle (\Delta P_0)^2 \rangle} = \frac{1}{4} \quad (7.150)$$

## 7.11 三模纠缠态表象的制备

我们知道双模纠缠态可以使用一个对称的 50∶50 的分束器在实验上得到,那么在实验上能否制备$|\rho, \chi_1, \chi_2\rangle$呢? 答案是肯定的,下面给出具体说明.

设粒子 1 处于态 $|p=0\rangle_1 \to \exp\left(\frac{1}{2}a_1^{\dagger 2}\right)|0\rangle_1$,粒子 2 和 3 处于 $|q=0\rangle_2 \otimes |q=0\rangle_3$,其中 $|q=0\rangle_j \to \exp\left(-\frac{1}{2}a_j^{\dagger 2}\right)|0\rangle_j$,这三个态分别输入到一个光学网络的三个输入端口作为输入态,这个光学网络发挥一个幺正算符 $R$ 的作用,在 $R$ 的作用下($R$ 待求)能做到

$$
\begin{aligned}
& R\,|p=0\rangle_1 \otimes |q=0\rangle_2 \otimes |q=0\rangle_3 \\
\to\ & e^{A^\dagger}\,|000\rangle \sim |\rho=0, \chi_1=0, \chi_2=0\rangle
\end{aligned}
\tag{7.151}
$$

对照式(7.136),这就意味着

$$
\begin{aligned}
& R(a_1^{\dagger 2}-a_2^{\dagger 2}-a_3^{\dagger 2})R^{-1} \\
=\ & R\,\widetilde{a}^\dagger \boldsymbol{E} a^\dagger R^{-1} \\
=\ & -\frac{1}{3}(2a_1^{\dagger 2}-a_2^{\dagger 2}+2a_3^{\dagger 2})-\frac{2}{3}(2a_1^\dagger a_2^\dagger - a_1^\dagger a_3^\dagger + 2a_2^\dagger a_3^\dagger) \\
=\ & \widetilde{a}^\dagger \boldsymbol{B} a^\dagger
\end{aligned}
\tag{7.152}
$$

其中 $\widetilde{a}^\dagger = (a_1^\dagger, a_2^\dagger, a_3^\dagger)$

$$
\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2 & -2 & 1\\ -2 & 1 & -2\\ 1 & -2 & -2\end{bmatrix} \tag{7.153}
$$

为了得到 $R$ 的表达式,让

$$R\tilde{a}^{\dagger}R^{-1}=\tilde{a}^{\dagger}\tilde{\boldsymbol{G}},\ Ra_iR^{-1}=G_{ij}a_j=a_i' \tag{7.154}$$

则有

$$\tilde{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{G}=\boldsymbol{B} \tag{7.155}$$

所以解方程(7.155)得到 $\boldsymbol{G}$ 为一正交矩阵，

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix} \tag{7.156}$$

$R$ 是希尔伯特空间的一个转动算符，可以由相干态表象和矩阵 $\boldsymbol{G}$ 构造，

$$\begin{aligned}R&=\int\prod_{i=1}^{3}\frac{\mathrm{d}^2z_i}{\pi}\mid G_{ij}z_j\rangle\langle z_i\mid\\&=\int\prod_{i=1}^{3}\frac{\mathrm{d}^2z_i}{\pi}:\exp\Big[\sum_i\Big(-\mid z_i\mid^2+\sum_j a_i^{\dagger}G_{ij}z_j+z_i^*a_i-a_i^{\dagger}a_i\Big)\Big]:\\&=:\exp[\tilde{a}^{\dagger}(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{I})a]:=\exp[\tilde{a}^{\dagger}(\ln\boldsymbol{G})a]\end{aligned} \tag{7.157}$$

这其中应用了关系式

$$\exp[\tilde{a}^{\dagger}\Lambda a]=:\exp[\tilde{a}^{\dagger}(\Lambda-I)a]: \tag{7.158}$$

令 $\ln\boldsymbol{G}=\mathrm{i}tK$，$K^{\dagger}=K$，那么时间演化算符为 $R(t)=\exp(\mathrm{i}t\tilde{a}^{\dagger}Ka)$，相应的厄米哈密顿量即为

$$\mathscr{H}=-\tilde{a}^{\dagger}Ka \tag{7.159}$$

## 7.12 三模纠缠态表象的 Wigner 函数[6]

利用完备性关系式(7.118)，三模 Fock 空间的任意算符

$H(a_1^\dagger, a_1; a_2^\dagger, a_2; a_3^\dagger, a_3)$可以表示为

$$H = \iiint d\rho' d\chi_1' d\chi_2' \iiint d\chi' d\rho_1' d\rho_2' \iiint d\chi'' d\rho_1'' d\rho_2'' \iiint d\rho'' d\chi_1'' d\chi_2'' \times \\ |\rho', \chi_1', \chi_2'\rangle\langle\rho', \chi_1', \chi_2'|\chi', \rho_1', \rho_2'\rangle\langle\chi', \rho_1', \rho_2'| H \\ |\chi'', \rho_1'', \rho_2''\rangle \times \langle\chi'', \rho_1'', \rho_2''|\rho'', \chi_1'', \chi_2''\rangle\langle\rho'', \chi_1'', \chi_2''| \tag{7.160}$$

再利用内积公式(7.131)得

$$H = \frac{1}{36(2\pi)^3} \iiint d\rho' d\chi_1' d\chi_2' \iiint d\chi' d\rho_1' d\rho_2' \iiint d\chi'' d\rho_1'' d\rho_2'' \iiint d\rho'' d\chi_1'' d\chi_2'' \times \\ |\rho', \chi_1', \chi_2'\rangle\langle\rho'', \chi_1'', \chi_2''| \langle\chi', \rho_1', \rho_2'| H |\chi'', \rho_1'', \rho_2''\rangle \times \\ \exp\left[-\frac{i}{6}(\chi'\rho' - \chi''\rho'') + \frac{i}{3}(\rho_2'\chi_2' - \chi_2''\rho_2'') + \right. \\ \left. \frac{i}{2}(\rho_1'\chi_1' - \chi_1''\rho_1'')\right] \tag{7.161}$$

做积分变数变换，

$$\rho' = \bar{p} - \rho,\ \chi_1' = q_{13} - \chi_1,\ \chi_2' = q_{123} - \chi_2 \tag{7.162}$$

$$\rho'' = \bar{p} + \rho,\ \chi_1'' = q_{13} + \chi_1,\ \chi_2'' = q_{123} + \chi_2 \tag{7.163}$$

$$\chi' = \bar{q} - \chi,\ \rho_1' = p_{13} - \rho_1,\ \rho_2' = p_{123} - \rho_2 \tag{7.164}$$

$$\chi'' = \bar{q} + \chi,\ \rho_1'' = p_{13} + \rho_1,\ \rho_2'' = p_{123} + \rho_2 \tag{7.165}$$

其中

$$\bar{p} \equiv p_1 - 2p_2 + p_3,\ \bar{q} \equiv q_1 - 2q_2 + q_3 \tag{7.166}$$

$$q_{123} = q_1 + q_2 + q_3,\ q_{13} = q_1 - q_3 \tag{7.167}$$

$$p_{123} = p_1 + p_2 + p_3,\ p_{13} = p_1 - p_3 \tag{7.168}$$

并计算相应的雅可比行列式

$$\iiint d\rho' d\chi_1' d\chi_2' \iiint d\rho'' d\chi_1'' d\chi_2'' = 8 \iiint d\rho d\chi_1 d\chi_2 \iiint d\bar{p} dq_{13} dq_{123} \tag{7.169}$$

$$\iiint d\chi' d\rho_1' d\rho_2' \iiint d\chi'' d\rho_1'' d\rho_2'' = 8\iiint d\chi\, d\rho_1 d\rho_2 \iiint d\,\overline{q} dp_{13} dp_{123} \tag{7.170}$$

方程(7.161)化为

$$H = \frac{2}{9}\iiint d\overline{q} dp_{13} dp_{123} \iiint d\overline{p} dq_{13} dq_{123} \Delta(\overline{p}, q_{13}, q_{123}; \overline{q}, p_{13}, p_{123}) \times h(\overline{p}, q_{13}, q_{123}; \overline{q}, p_{13}, p_{123}) \tag{7.171}$$

其中定义了

$$\begin{aligned} &\Delta(\overline{p}, q_{13}, q_{123}; \overline{q}, p_{13}, p_{123}) \\ &= \iiint \frac{d\rho d\chi_1 d\chi_2}{\pi^3} \exp\left(\frac{i}{3}\overline{q}\rho - ip_{13}\chi_1 - \frac{2i}{3}p_{123}\chi_2\right) \times \\ &\quad |\overline{p} - \rho, q_{13} - \chi_1, q_{123} - \chi_2\rangle\langle\overline{p} + \rho, q_{13} + \chi_1, q_{123} + \chi_2| \end{aligned} \tag{7.172}$$

由 IWOP 积分技术可以求出此积分,整理后得到

$$\begin{aligned} &\Delta(\overline{p}, q_{13}, q_{123}; \overline{q}, p_{13}, p_{123}) \\ &= \frac{1}{\pi^3}\prod_{j=1}^{3} :\exp\left[-2\left(\frac{q_j - ip_j}{\sqrt{2}} - a_j^\dagger\right)\left(\frac{q_j + ip_j}{\sqrt{2}} - a_j\right)\right]: \\ &= \prod_{j=1}^{3} \Delta_j(\alpha_j) \end{aligned} \tag{7.173}$$

与单模 Wigner 算符比较,有

$$\Delta(\overline{p}, q_{13}, q_{123}; \overline{q}, p_{13}, p_{123}) = \Delta(\alpha_1)\Delta(\alpha_2)\Delta(\alpha_3) \tag{7.174}$$

所以称 $\Delta(\overline{p}, q_{13}, q_{123}; \overline{q}, p_{13}, p_{123})$为三模 Wigner 算符. 很容易可以证明它的完备性

$$\iiint \Delta(\overline{p}, q_{13}, q_{123}; \overline{q}, p_{13}, p_{123}) d\overline{p} dq_{13} dq_{123} d\overline{q} dp_{13} dp_{123} = 1 \tag{7.175}$$

另一方面,方程(7.171)中 $h(\overline{p}, q_{13}, q_{123}; \overline{q}, p_{13}, p_{123})$ 的表达式为

$$h(\overline{p}, q_{13}, q_{123}; \overline{q}, p_{13}, p_{123})$$
$$= \iiint d\chi\, d\rho_1 d\rho_2 \exp\left(\frac{i}{3}\overline{p}\chi - iq_{13}\rho_1 - \frac{2i}{3}q_{123}\rho_2\right)\times$$
$$\langle \overline{q}-\chi, p_{13}-\rho_1, p_{123}-\rho_2 \mid H \mid \overline{q}+\chi, p_{13}+\rho_1, p_{123}+\rho_2\rangle \tag{7.176}$$

所以,$h(\overline{p}, q_{13}, q_{123}; \overline{q}, p_{13}, p_{123})$ 可以看作是算符 $H$ 的经典对应,或者说这个式子是 $\langle \overline{q}-\chi, p_{13}-\rho_1, p_{123}-\rho_2 \mid H \mid \overline{q}+\chi, p_{13}+\rho_1, p_{123}+\rho_2\rangle$ 的 Weyl 变换,因此这是一个新的 Weyl-Wigner 变换公式.

下面计算 Wigner 算符 $\Delta(\overline{p}, q_{13}, q_{123}; \overline{q}, p_{13}, p_{123})$ 的边缘分布.

对(7.172)积分,可以将 $\Delta(\overline{p}, q_{13}, q_{123}; \overline{q}, p_{13}, p_{123})$ 写成如下形式

$$\Delta(\overline{p}, q_{13}, q_{123}; \overline{q}, p_{13}, p_{123})$$
$$= \frac{1}{\pi^3} : \exp\Big[-\frac{1}{6}\overline{p}^2 - \frac{1}{6}\overline{q}^2 - \frac{1}{2}q_{13}^2 - \frac{1}{2}p_{13}^2 - \frac{1}{3}q_{123}^2 - \frac{1}{3}p_{123}^2 +$$
$$\frac{\sqrt{2}}{6}i\,\overline{p}(a_1^\dagger - 2a_2^\dagger + a_3^\dagger - a_1 + 2a_2 - a_3) + \frac{\sqrt{2}}{6}\overline{q}(a_1^\dagger - 2a_2^\dagger + a_3^\dagger +$$
$$a_1 - 2a_2 + a_3) + \frac{\sqrt{2}}{2}q_{13}(a_1^\dagger - a_3^\dagger + a_1 - a_3) - \frac{\sqrt{2}}{2}ip_{13}(a_1 - a_3 -$$
$$a_1^\dagger + a_3^\dagger) - 2\sum_{j=1}^{3}a_j^\dagger a_j + \frac{\sqrt{2}}{3}q_{123}\left(\sum_{j=1}^{3}a_j + \sum_{j=1}^{3}a_j^\dagger\right) -$$
$$\frac{\sqrt{2}}{3}ip_{123}\left(\sum_{j=1}^{3}a_j - \sum_{j=1}^{3}a_j^\dagger\right)\Big] : \tag{7.177}$$

所以对 $d\overline{p}dq_{13}dq_{123}$ 求积分得,

$$\iiint d\overline{p}dq_{13}dq_{123}\Delta(\overline{p}, q_{13}, q_{123}; \overline{q}, p_{13}, p_{123})$$

$$= \frac{6}{\pi^{3/2}} : \exp\Big\{ -\frac{1}{6}(\overline{q}^2 + 3p_{13}^2 + 2p_{123}^2) + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}p_{13}[(a_1^\dagger - a_3^\dagger) -$$

$$(a_1 - a_3)] + \frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{i}p_{123}[\sum_{j=1}^{3} a_j^\dagger - \sum_{j=1}^{3} a_j] + \frac{\sqrt{2}}{6}\overline{q}[(a_1^\dagger - 2a_2^\dagger +$$

$$a_3^\dagger) + (a_1 - 2a_2 + a_3)] + \frac{1}{6}[(2a_1^{\dagger 2} - a_2^{\dagger 2} + 2a_3^{\dagger 2}) + (2a_1^2 -$$

$$a_2^2 + 2a_3^2)] - \sum_{j=1}^{3} a_j^\dagger a_j + \frac{1}{3}[(2a_1^\dagger a_2^\dagger - a_1^\dagger a_3^\dagger + 2a_2^\dagger a_3^\dagger) +$$

$$(2a_1 a_2 - a_1 a_3 + 2a_2 a_3)]\Big\} : \tag{7.178}$$

与式(7.125)比较，可以得到

$$\iiint \mathrm{d}\overline{p}\mathrm{d}q_{13}\mathrm{d}q_{123}\Delta(\overline{p}, q_{13}, q_{123}; \overline{q}, p_{13}, p_{123})$$
$$= 6^2 \mid \chi, \rho_1, \rho_2\rangle\langle\chi, \rho_1, \rho_2 \mid \Big|_{\chi\to\overline{q},\ \rho_1\to p_{13},\ \rho_2\to p_{123}} \tag{7.179}$$

所以 Wigner 函数 $W_\Psi = \langle\Psi \mid \Delta(\overline{p}, q_{13}, q_{123}; \overline{q}, p_{13}, p_{123}) \mid \Psi\rangle$ 的边缘分布即为

$$6^{-2}\iiint \mathrm{d}\overline{p}\mathrm{d}q_{13}\mathrm{d}q_{123}W_\Psi$$
$$= \langle\Psi \mid \chi, \rho_1, \rho_2\rangle\langle\chi, \rho_1, \rho_2 \mid \Psi\rangle \Big|_{\chi\to\overline{q},\ \rho_1\to p_{13},\ \rho_2\to p_{123}}$$
$$= \mid \langle\Psi \mid \chi, \rho_1, \rho_2\rangle \mid^2_{\chi\to\overline{q},\ \rho_1\to p_{13},\ \rho_2\to p_{123}} \tag{7.180}$$

其物理意义可参照式(7.48)下面几行的叙述. 同样的方式，对 Wigner 算符做 $\mathrm{d}\,\overline{q}\mathrm{d}p_{13}\mathrm{d}p_{123}$ 的积分，

$$\iiint \mathrm{d}\,\overline{q}\mathrm{d}p_{13}\mathrm{d}p_{123}\Delta(\overline{p}, q_{13}, q_{123}; \overline{q}, p_{13}, p_{123})$$
$$= 6^2 \mid \rho, \chi_1, \chi_2\rangle\langle\rho, \chi_1, \chi_2 \mid \Big|_{\rho\to\overline{p},\ \chi_1\to q_{13},\ \chi_2\to q_{123}} \tag{7.181}$$

得到 $W_\Psi$ 的另一个边缘分布，

$$6^{-2}\iiint \mathrm{d}\,\bar{q}\mathrm{d}p_{13}\mathrm{d}p_{123}W_{\Psi}$$
$$=\langle\Psi\mid\rho,\chi_1,\chi_2\rangle\langle\rho,\chi_1,\chi_2\mid\Psi\rangle\Big|_{\rho\to\bar{p},\ \chi_1\to q_{13},\ \chi_2\to q_{123}}$$
$$=|\langle\Psi\mid\rho,\chi_1,\chi_2\rangle|^2_{\rho\to\bar{p},\ \chi_1\to q_{13},\ \chi_2\to q_{123}} \tag{7.182}$$

作为应用，求下面几个态的 Wigner 函数. 首先，对于态 $|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle$，其 Wigner 函数如下

$$\begin{aligned}W_{|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle}&\equiv\langle\rho,\chi_1,\chi_2\mid\Delta\mid\rho,\chi_1,\chi_2\rangle\\&=\iiint\frac{\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\chi_1'\mathrm{d}\chi_2'}{\pi^3}\exp\Big(\frac{\mathrm{i}}{3}\bar{q}\rho'-\mathrm{i}p_{13}\chi_1'-\frac{2\mathrm{i}}{3}p_{123}\chi_2'\Big)\times\\&\quad\delta(\bar{p}-\rho'-\rho)\delta(q_{13}-\chi_1'-\chi_1)\delta(q_{123}-\chi_2'-\chi_2)\times\\&\quad\delta(\bar{p}+\rho'-\rho)\delta(q_{13}+\chi_1'-\chi_1)\delta(q_{123}+\chi_2'-\chi_2)\\&=\frac{1}{(2\pi^3)}\delta(\bar{p}-\rho)\delta(q_{13}-\chi_1)\delta(q_{123}-\chi_2)\end{aligned} \tag{7.183}$$

接着来求三模压缩真空态的 Wigner 函数，压缩算符式(7.132)也可以表示成，

$$S_3=\mu^{3/2}\iiint\mathrm{d}\chi\,\mathrm{d}\rho_1\mathrm{d}\rho_2\mid\mu\chi,\mu\rho_1,\mu\rho_2\rangle\langle\chi,\rho_1,\rho_2\mid,\ \mu=\mathrm{e}^{\lambda} \tag{7.184}$$

所以三模压缩真空态 $S_3|000\rangle$ 为

$$\begin{aligned}|\lambda\rangle&\equiv S_3\mid000\rangle\\&=\frac{1}{\sqrt{6}\,\pi^{3/4}}\iiint\frac{\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\chi_1\mathrm{d}\chi_2}{\mu^{3/2}}\Big|\frac{\rho}{\mu},\frac{\chi_1}{\mu},\frac{\chi_2}{\mu}\Big\rangle\times\\&\quad\exp\Big[-\frac{1}{12}(\rho^2+3\chi_1^2+2\chi_2^2)\Big]\end{aligned} \tag{7.185}$$

那么它的 Wigner 函数可以求出，

$$\langle\lambda\mid\Delta\mid\lambda\rangle=\frac{1}{6\pi^{3/2}}\iiint\frac{\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\chi_1'\mathrm{d}\chi_2'}{(\pi\mu)^3}\iiint\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\chi_1\mathrm{d}\chi_2\iiint\mathrm{d}\rho''\mathrm{d}\chi_1''\mathrm{d}\chi_2''\times$$

$$\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{3}\bar{q}\rho-\mathrm{i}p_{13}\chi_1-\frac{2\mathrm{i}}{3}p_{123}\chi_2-\frac{1}{12}(\rho''^2+3\chi''^2_1+2\chi''^2_2)-\frac{1}{12}(\rho'^2+3\chi'^2_1+2\chi'^2_2)\right]\times$$
$$\delta\left(\frac{\rho'}{\mu}-\bar{p}+\rho\right)\delta\left(\frac{\chi'_1}{\mu}-q_{13}+\chi_1\right)\delta\left(\frac{\chi'_2}{\mu}-q_{123}+\chi_2\right)\times$$
$$\delta\left(\bar{p}+\rho-\frac{\rho''}{\mu}\right)\delta\left(q_{13}+\chi_1-\frac{\chi''_1}{\mu}\right)\delta\left(q_{123}+\chi_2-\frac{\chi''_2}{\mu}\right)$$
$$=\frac{1}{\pi^3}\exp\left[-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-2\lambda}(\bar{q}^2+3p_{13}^2+2p_{123}^2)-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{2\lambda}(\bar{p}^2+3q_{13}^2+2q_{123}^2)\right] \tag{7.186}$$

其中压缩参数 $\mathrm{e}^{-2\lambda}$ 和 $\mathrm{e}^{2\lambda}$ 体现了不同方向的压缩. $S_3$ 的 Weyl 经典对应亦可以求得,

$$\mathrm{Tr}(\Delta S_3)=\iiint\frac{\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\chi'_1\mathrm{d}\chi'_2}{\mu^{3/2}}\langle\rho',\chi'_1,\chi'_2|\Delta\left|\frac{\rho'}{\mu},\frac{\chi'_1}{\mu},\frac{\chi'_2}{\mu}\right\rangle$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\mathrm{sech}^3\frac{\lambda}{2}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{3}\tanh\frac{\lambda}{2}(\overline{qp}-3p_{13}q_{13}-2p_{123}q_{123})\right] \tag{7.187}$$

其中用到了关系式,

$$\frac{\mu-1}{\mu+1}=\tanh\frac{\lambda}{2},\ \frac{\mu^{1/2}}{\mu+1}=\frac{1}{2}\mathrm{sech}\frac{\lambda}{2} \tag{7.188}$$

# 参考文献


[1] Hu Liyun, Fan Hongyi. Time evolution of Wigner function in laser process derived by entangled state representation [J]. Opt. Commun., 2009,282:4379-4383.

[2] Fan Hongyi. Generalized Weyl transformation and the entangled Wigner operator-An inequality about the Wigner function in the state representation [J]. to be published.

[3] Liang Baolong, Wang Jisuo, Fan Hongyi. Marginal Distributions of Wigner Function in a Mesoscopic L-C Circuit at Finite Temperature and Thermal Wigner Operator [J]. Int. J. Theor. Phys., 2006, 46:7.

[4] Ansoldi S, Aurilia A, Spallucci E. Membrane Vacuum as a type Ⅱ Super Conductor [J]. Int. J. Mod. Phys. B, 1996, 10:1695 - 1705; Takahashi Y. Umezawa H. Mixed state in A - 15 - structure superconductors: Finite temperature [J]. Phys. Rev. B, 1977, 15: 3332 - 3338.

[5] Fan Hongyi, Fan Yue. New representation of thermal states in thermal field dynamics [J]. Phys. Lett. A, 1998, 246:242 - 246; Fan Hongyi. Minimum Uncertainty States for Angular-momentum Phase Uncertainty Relation in Radius Phase Description of An Electron in Uniform Magnetic Field [J]. Mod. Phys. Lett. B, 2000, 14: 253 - 242; Fan Hongyi, Liang Xianting. Quantum Fluctuation in Thermal Vacuum State for Mesoscopic LC Electric Circuit [J]. Chin. Phys. Lett., 2000, 17(3):174.

[6] Lv Cuihong, Fan Hongyi. Two mutually conjugate tripartite entangled states and their fractional Fourier transformation kernel [J]. Chin. Phys. B 19, 2010, 120303.

[7] Chen Junhua, Fan Hongyi, Ren Gang. Multipartite entangled state representation and squeezing of the n-pair entangled state [J]. J. Phys. A: Math. Theor., 2010, 43:255302.

# 第 8 章 纠缠形式的范氏变换

在这一章我们将第 6 章叙述的范氏变换推广到纠缠态表象的情况,研究其性质,并用它来导出复分数傅里叶变换核,以丰富变换理论.

## 8.1 基于纠缠态表象的范氏变换[1]

近年来,由于在量子通信和量子信息中的广泛应用,纠缠态引起了越来越多人的关注.本节将范氏变换推广到两模纠缠形式,并研究它的特性.

在 $\xi - \eta$ 相空间,给出纠缠的范氏变换

$$\int \frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2} \exp[(\xi-\mu)(\eta^*-\nu^*)-(\eta-\nu)(\xi^*-\mu^*)]F(\eta,\xi) \equiv D(\nu,\mu) \tag{8.1}$$

当 $F(\eta, \xi) = 1$ 时,式(8.1)变为

$$\int \frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2} \exp[(\xi-\mu)(\eta^*-\nu^*)-(\eta-\nu)(\xi^*-\mu^*)] = \int d^2\xi \delta^{(2)}(\xi-\mu)\exp[\nu(\xi^*-\mu^*)-\nu^*(\xi-\mu)] = 1 \tag{8.2}$$

其中 $\delta^{(2)}(\xi-\mu) = \delta(\xi-\mu)\delta(\xi^*-\mu^*)$,可以看出变换(8.1)相当于

$$F(\eta,\xi) \to \int \frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2} \exp[(\xi-\mu)(\eta^*-\nu^*)-(\eta-\nu)(\xi^*-\mu^*)]F(\eta,\xi) = \int \frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2} F(\eta+\nu,\xi+\mu)\exp(\xi\eta^*-\eta\xi^*) \tag{8.3}$$

式(8.1)的逆变换为

$$\int \frac{d^2\mu d^2\nu}{\pi^2}\exp[(\xi^* - \mu^*)(\eta - \nu) - (\eta^* - \nu^*)(\xi - \mu)]D(\nu, \mu)$$

$$\equiv F(\eta, \xi) \tag{8.4}$$

将式(8.1)代入式(8.4)得到

$$\int \frac{d^2\xi' d^2\eta'}{\pi^2}F(\eta', \xi')\int \frac{d^2\mu d^2\nu}{\pi^2}\exp[(\xi' - \mu)(\eta'^* - \nu^*) - (\eta' - \nu)\times$$

$$(\xi'^* - \mu^*) + (\xi^* - \mu^*)(\eta - \nu) - (\eta^* - \nu^*)(\xi - \mu)]$$

$$= \int \frac{d^2\xi' d^2\eta'}{\pi^2}F(\eta', \xi')\exp(\xi'\eta'^* - \eta'\xi'^* + \xi^*\eta - \xi\eta^*)\times$$

$$\int \frac{d^2\mu d^2\nu}{\pi^2}e^{(\eta^* - \eta'^*)\mu + (\eta' - \eta)\mu^*}e^{(\xi'^* - \xi^*)\nu + (\xi - \xi')\nu^*}$$

$$= \int d^2\xi' d^2\eta' F(\eta', \xi')\exp(\xi'\eta'^* - \eta'\xi'^* + \xi^*\eta - \xi\eta^*)$$

$$\delta^{(2)}(\eta' - \eta)\delta^{(2)}(\xi - \xi')$$

$$= F(\eta, \xi) \tag{8.5}$$

这个变换的 Parseval - like 定理可以证明为

$$\int \frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2}\mid F(\eta, \xi)\mid^2$$

$$= \int \frac{d^2\mu d^2\nu}{\pi^2}D(\nu, \mu)\int \frac{d^2\mu' d^2\nu'}{\pi^2}D^*(\nu', \mu')\exp[(\mu^*\nu - \mu\nu^*) +$$

$$(\mu'\nu'^* - \mu'^*\nu')]\times\int \frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2}\exp[(\mu'^* - \mu^*)\eta + (\mu - \mu')\eta^* +$$

$$(\nu^* - \nu'^*)\xi + (\nu' - \nu)\xi^*]$$

$$= \int \frac{d^2\mu d^2\nu}{\pi^2}D(\nu, \mu)\int d^2\mu' d^2\nu' D^*(\nu', \mu')\exp[(\mu^*\nu - \mu\nu^*) +$$

$$(\mu'\nu'^* - \mu'^*\nu')]\times\delta^{(2)}(\mu - \mu')\delta^{(2)}(\nu' - \nu)$$

$$= \int \frac{d^2\mu d^2\nu}{\pi^2}\mid D(\nu, \mu)\mid^2 \tag{8.6}$$

例如，$e^{\lambda\eta^*+\sigma\eta+\tau\xi^*+\gamma\xi}$的范氏变换为

$$
\begin{aligned}
e^{\lambda\eta^*+\sigma\eta+\tau\xi^*+\gamma\xi} \to & \int \frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2} \exp[(\xi-\mu)(\eta^*-\nu^*)- \\
& (\eta-\nu)(\xi^*-\mu^*)] e^{\lambda\eta^*+\sigma\eta+\tau\xi^*+\gamma\xi} \\
& = e^{\mu\nu^*-\nu\mu^*} \int d^2\xi \delta^{(2)}(\xi-\mu+\lambda) e^{(\gamma-\nu^*)\xi+(\nu+\tau)\xi^*} \\
& = e^{\mu\nu^*-\nu\mu^*} \exp[(\gamma-\nu^*)(\mu-\lambda)+(\nu+\tau)(\mu^*+\sigma)] \\
& = \exp[(\tau\sigma-\gamma\lambda)+\tau\mu^*+\gamma\mu+\lambda\nu^*+\sigma\nu] \qquad (8.7)
\end{aligned}
$$

而 $e^{\lambda\eta^*+\sigma\eta+\tau\xi^*+\gamma\xi}$的范氏逆变换为

$$
\begin{aligned}
e^{\lambda\eta^*+\sigma\eta+\tau\xi^*+\gamma\xi} \to & \int \frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2} \exp[(\xi^*-\mu^*)(\eta-\nu)- \\
& (\eta^*-\nu^*)(\xi-\mu)] e^{\lambda\eta^*+\sigma\eta+\tau\xi^*+\gamma\xi} \\
& = \exp[-(\tau\sigma-\gamma\lambda)+\tau\mu^*+\gamma\mu+\lambda\nu^*+\sigma\nu] \qquad (8.8)
\end{aligned}
$$

## 8.2 $\delta^{(2)}(\nu-a_1+a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\mu-a_1-a_2^\dagger)$的 Weyl 编序[2]

我们来求 $\delta^{(2)}(\nu-a_1+a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\mu-a_1-a_2^\dagger)$的 Weyl 编序，利用两个互为共轭的纠缠态表象的完备性及内积，可得

$$
\begin{aligned}
& \delta^{(2)}(\nu-a_1+a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\mu-a_1-a_2^\dagger) \\
& = \int \frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2} \delta^{(2)}(\nu-a_1+a_2^\dagger) \mid \eta\rangle\langle\eta \mid \xi\rangle\langle\xi \mid \delta^{(2)}(\mu-a_1-a_2^\dagger) \\
& = \frac{1}{2}\int \frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2} \mid \eta\rangle\langle\xi \mid e^{(\eta^*\xi-\eta\xi^*)/2} \delta^{(2)}(\nu-\eta)\delta^{(2)}(\mu-\xi) \\
& = \frac{1}{2} \mid \eta\rangle_{\eta=\nu}\langle\xi\mid_{\xi=\mu} e^{(\nu^*\mu-\nu\mu^*)/2} \qquad (8.9)
\end{aligned}
$$

从式(8.9)看，如果知道了$|\eta\rangle\langle\xi|$的 Weyl 编序，就可以达到这一目

的.利用算符的 Weyl 编序展开公式(4.57)以及相干态与纠缠态的内积

$$\langle \xi \mid \beta_1, \beta_2 \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \mid \xi \mid^2 + \xi^* \beta_1 + \xi\beta_2 - \beta_1\beta_2 - \frac{1}{2} \mid \beta_1 \mid^2 - \frac{1}{2} \mid \beta_2 \mid^2\right) \tag{8.10}$$

$$\langle -\beta_1, -\beta_2 \mid \eta \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \mid \eta \mid^2 - \eta\beta_1^* + \eta^* \beta_1^* + \beta_1^* \beta_2^* - \frac{1}{2} \mid \beta_1 \mid^2 - \frac{1}{2} \mid \beta_2 \mid^2\right) \tag{8.11}$$

可导出$|\eta\rangle\langle\xi|$的 Weyl 编序形式

$$\begin{aligned}
\mid \eta\rangle\langle \xi \mid &= 4\int \frac{d^2\beta_1 d^2\beta_2}{\pi^2} \vdots \exp\Big[-\frac{\mid \eta \mid^2}{2} - \eta\beta_1^* + \eta^* \beta_2^* + \beta_1^* \beta_2^* - \\
&\quad \mid \beta_1 \mid^2 - \mid \beta_2 \mid^2 - \frac{\mid \xi \mid^2}{2} + \xi^*\beta_1 + \xi\beta_2 - \beta_1\beta_2 + \\
&\quad 2\sum_{k=1}^{2} (\beta_k^* a_k - a_k^\dagger\beta_k + a_k^\dagger a_k)\Big] \vdots \\
&= 2 \vdots \exp\Big[\frac{1}{2}(\xi\eta^* - \xi^* \eta) + \xi(a_2 - a_1^\dagger) + \eta(a_2 + a_1^\dagger) - \\
&\quad \eta^* (a_1 + a_2^\dagger) + \xi^* (a_1 - a_2^\dagger) + 2a_2^\dagger a_1^\dagger - 2a_2 a_1\Big] \vdots
\end{aligned} \tag{8.12}$$

即得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \mid \eta\rangle\langle \xi \mid e^{(\eta\xi^* - \xi\eta^*)/2} \\
&= \vdots \exp[(\xi - a_1 - a_2^\dagger)(\eta^* - a_1^\dagger + a_2) - \\
&\quad (\eta - a_1 + a_2^\dagger)(\xi^* - a_1^\dagger - a_2)] \vdots
\end{aligned} \tag{8.13}$$

将式(8.13)代入到式(8.9)中可得

$$\delta^{(2)}(\nu - a_1 + a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\mu - a_1 - a_2^\dagger)$$

$$= \vdots \exp[(\mu - a_1 - a_2^\dagger)(\nu^* - a_1^\dagger + a_2) - (\nu - a_1 + a_2^\dagger)(\mu^* - a_1^\dagger - a_2)] \vdots \quad (8.14)$$

由于 $[a_1^\dagger - a_2, a_1 + a_2^\dagger] = -2$，再考虑另一种排序的算符，用纠缠态表象得

$$\delta^{(2)}(\mu - a_1 - a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\nu - a_1 + a_2^\dagger) = \frac{1}{2}\int \frac{d^2\eta d^2\xi}{\pi^2} |\xi\rangle\langle\eta| e^{(\eta\xi^* - \xi\eta^*)/2}\delta^2(\nu - \eta)\delta^2(\mu - \xi) \quad (8.15)$$

以同样的方法可得

$$\frac{1}{2}|\xi\rangle\langle\eta| \exp[(\eta\xi^* - \xi\eta^*)/2] = \vdots \exp[(\eta - a_1 + a_2^\dagger)(\xi^* - a_1^\dagger - a_2) - (\xi - a_1 - a_2^\dagger)(\eta^* - a_1^\dagger + a_2)] \vdots \quad (8.16)$$

所以

$$\delta^{(2)}(\mu - a_1 - a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\nu - a_1 + a_2^\dagger) = \vdots \exp[(\nu - a_1 + a_2^\dagger)(\mu^* - a_1^\dagger - a_2) - (\mu - a_1 - a_2^\dagger)(\nu^* - a_1^\dagger + a_2)] \vdots \quad (8.17)$$

## 8.3 $\delta^{(2)}(\nu - a_1 + a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\mu - a_1 - a_2^\dagger)$和纠缠 Wigner 算符的互换

两模 Wigner 算符在纠缠态表象中的表示为

$$\Delta(\mu, \nu) = \int \frac{d^2\eta}{\pi^3} |\nu - \eta\rangle\langle\nu + \eta| e^{\eta\mu^* - \mu\eta^*} \quad (8.18)$$

利用和上节类似的方法，即用式(4.57)可以得到$|\nu-\eta\rangle\langle\nu+\eta|$的Weyl编序形式

$$|\nu-\eta\rangle\langle\nu+\eta| = \vdots\, \delta^{(2)}(\nu-a_1+a_2^\dagger)\times\exp[\eta(\nu^*-2a_1^\dagger)- \eta^*(\nu-2a_1)-2(a_1^\dagger-\nu^*)(a_1-\nu)+2a_2^\dagger a_2]\,\vdots \tag{8.19}$$

将式(8.19)代入式(8.18)并积分就得到

$$\Delta(\mu,\nu) = \vdots\, \delta^{(2)}(\mu-a_1-a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\nu-a_1+a_2^\dagger)\,\vdots \tag{8.20}$$

它仍然是一个简洁的 Dirac $\delta$ -算符函数的形式. 那么由式(8.14)和式(8.20)，得

$$\begin{aligned}&\delta^{(2)}(\eta-a_1+a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\xi-a_1-a_2^\dagger)\\&=\vdots\,\exp[(\xi-a_1-a_2^\dagger)(\eta^*-a_1^\dagger+a_2)-(\eta-a_1+a_2^\dagger)(\xi^*-a_1^\dagger-a_2)]\,\vdots\\&=\int\frac{d^2\mu d^2\nu}{\pi^2}\vdots\,\exp[(\xi-\mu)(\eta^*-\nu^*)-(\eta-\nu)(\xi^*-\mu^*)]\\&\quad\delta^{(2)}(\mu-a_1-a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\nu-a_1+a_2^\dagger)\,\vdots\\&=\int\frac{d^2\mu d^2\nu}{\pi^2}\exp[(\xi-\mu)(\eta^*-\nu^*)-(\eta-\nu)(\xi^*-\mu^*)]\Delta(\mu,\nu)\end{aligned} \tag{8.21}$$

这就是 Wigner 算符 $\Delta(\mu,\nu)$和 $\delta^{(2)}(\nu-a_1+a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\mu-a_1-a_2^\dagger)$的范氏变换(纠缠形式)互换式. 式(8.21)的范氏逆变换为

$$\begin{aligned}&\int\frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2}\delta^{(2)}(\eta-a_1+a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\xi-a_1-a_2^\dagger)\exp[-(\xi-\mu)(\eta^*-\nu^*)+\\&(\eta-\nu)(\xi^*-\mu^*)]\\&=\int\frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2}\int\frac{d^2\mu' d^2\nu'}{\pi^2}\Delta(\mu',\nu')\exp[(\xi-\mu')(\eta^*-\nu'^*)-(\eta-\end{aligned}$$

$$\nu')(\xi^* - \mu'^*)]\exp[-(\xi-\mu)(\eta^* - \nu^*) + (\eta-\nu)(\xi^* - \mu^*)]$$

$$= \int \frac{d^2\mu' d^2\nu'}{\pi^2} \Delta(\mu', \nu') \exp(-\nu'\mu'^* + \mu'\nu'^* - \mu\nu^* + \nu\mu^*) \times$$

$$\int \frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2} \exp[\xi(\nu^* - \nu'^*) + \xi^*(\nu-\nu')]\exp[\eta(\mu'^* - \mu^*) + \eta^*(\mu' -$$

$$\mu)]$$

$$= \int \frac{d^2\mu' d^2\nu'}{\pi^2} \Delta(\mu', \nu') \exp(-\nu'\mu'^* + \mu'\nu'^* - \mu\nu^* + \nu\mu^*)$$

$$\delta^{(2)}(\nu' - \nu)\delta^{(2)}(\mu' - \mu)$$

$$= \Delta(\mu, \nu) \tag{8.22}$$

所以式(8.21)和式(8.22)是纠缠 Wigner 算符在量子相空间的范氏复积分变换.

在式(8.22)的两边乘以 $\int d^2\mu d^2\nu D(\mu, \nu)$ 并考虑到关系式(8.4)以及 $Q_j = \frac{a_j + a_j^\dagger}{\sqrt{2}}$, $P_j = \frac{a_j - a_j^\dagger}{i\sqrt{2}}$ 可得

$$\int d^2\mu d^2\nu \Delta(\mu, \nu) D(\mu, \nu)$$

$$= \int d^2\xi d^2\eta \delta^{(2)}(\eta - a_1 + a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\xi - a_1 - a_2^\dagger) \int \frac{d^2\mu d^2\nu}{\pi^2} D(\mu, \nu)$$

$$\exp[-(\xi-\mu)(\eta^* - \nu^*) + (\eta-\nu)(\xi^* - \mu^*)]$$

$$= \int d^2\xi d^2\eta \delta^{(2)}(\eta - a_1 + a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\xi - a_1 - a_2^\dagger) F(\eta, \xi)$$

$$= \int d^2\xi d^2\eta \delta\left(\eta_1 - \frac{Q_1 - Q_2}{\sqrt{2}}\right)\delta\left(\eta_2 - \frac{P_1 + P_2}{\sqrt{2}}\right) \times$$

$$\delta\left(\xi_1 - \frac{Q_1 + Q_2}{\sqrt{2}}\right)\delta\left(\xi_2 - \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{2}}\right) F(\eta, \xi)$$

$$= F\left(\frac{Q_1 - Q_2}{\sqrt{2}}, \frac{P_1 + P_2}{\sqrt{2}}, \frac{Q_1 + Q_2}{\sqrt{2}}, \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{2}}\right) \tag{8.23}$$

## 8.4 $(a_1^\dagger - a_2)^n (a_1 + a_2^\dagger)^m$ 的 Weyl 编序

作为范氏变换的应用，我们来求$(a_1^\dagger - a_2)^n (a_1 + a_2^\dagger)^m$ 的 Weyl 编序形式. 利用$|\eta\rangle$和$|\xi\rangle$表象的完备性关系式及它们的内积，可得

$$\frac{1}{2}\int \frac{d^2\eta d^2\xi}{\pi^2} |\eta\rangle\langle\xi| e^{(\xi\eta^* - \eta\xi^*)/2} = 1 \tag{8.24}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d^2\eta d^2\xi}{\pi^2} |\xi\rangle\langle\eta| e^{(\eta\xi^* - \xi\eta^*)/2} = 1 \tag{8.25}$$

再由$|\eta\rangle$和$|\xi\rangle$满足的本征方程以及式(8.24)、(8.25)，有

$$\begin{aligned}
&(a_1^\dagger - a_2)^n (a_1 + a_2^\dagger)^m \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2} \eta^{*n}\xi^m |\eta\rangle\langle\xi| e^{(\eta^*\xi - \xi^*\eta)/2} \\
&= \int \frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2} \eta^{*n}\xi^m \vdots \exp[(\xi - a_1 - a_2^\dagger)(\eta^* - a_1^\dagger + a_2) - \\
&\quad (\eta - a_1 + a_2^\dagger)(\xi^* - a_1^\dagger - a_2)] \vdots \\
&= \int \frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2} \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} \frac{i^{n+m} m!n!}{(n-k)!k!(m-l)!l!} \eta_1^{n-k} (-\eta_2)^n \xi_1^{m-l}\xi_2^m \times \\
&\quad \vdots \exp\left\{[-2i\eta_2 + (a_1 + a_2 - a_1^\dagger - a_2^\dagger)]\left[\xi_1 - \frac{1}{2}i(a_1^\dagger + a_2^\dagger + a_1 + a_2)\right] + \right. \\
&\quad \left.[2i\eta_1 + i(a_2^\dagger - a_1^\dagger - a_1 + a_2)]\left[\xi_2 - \frac{1}{2}i(a_1^\dagger - a_1 + a_2 - a_2^\dagger)\right]\right\} \vdots \\
&= -\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} \frac{i^{n+m} m!n!}{(n-k)!k!(m-l)!l!} \times \int \frac{d\xi_1 d(-\eta_2)}{\pi} (-\eta_2)^n \xi_1^{m-l} \\
&\quad \vdots \exp\left\{2i\left[-\eta_2 + \frac{P_1 + P_2}{\sqrt{2}}\right]\left[\xi_1 - \frac{Q_1 + Q_2}{\sqrt{2}}\right]\right\} \times \int \frac{d\eta_1 d\xi_2}{\pi} \xi_2^m \eta_1^{n-k} \\
&\quad \exp\left\{2i\left[\eta_1 - \frac{Q_1 - Q_2}{\sqrt{2}}\right]\left[\xi_2 - \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{2}}\right]\right\} \vdots
\end{aligned}$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}\frac{(\sqrt{2})^{k+l}m!n!}{(n-k)!k!(m-l)!l!}\vdots \mathrm{H}_{n-k,m}[(Q_1-Q_2),$$

$$\mathrm{i}(P_1-P_2)]\mathrm{H}_{m-l,n}[\mathrm{i}(Q_1+Q_2),-(P_1+P_2)]\vdots \tag{8.26}$$

其中用到了第 6 章给出的积分公式(6.21)，可以看出这种将$(a_1^\dagger-a_2)^n(a_1+a_2^\dagger)^m$ 化为 Weyl 编序的方法简单明了. 同理，可以给出$(a_1+a_2^\dagger)^m(a_1^\dagger-a_2)^n$ 的 Weyl 编序

$$(a_1+a_2^\dagger)^m(a_1^\dagger-a_2)^n$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}\frac{(-1)^l(\sqrt{2})^{k+l}m!n!}{(n-k)!k!(m-l)!l!}\times\vdots \mathrm{H}_{n,m}[(Q_2-Q_1),$$

$$\mathrm{i}(P_1-P_2)]\mathrm{H}_{m-k,n-l}[(Q_1+Q_2),\mathrm{i}(P_1+P_2)]\vdots \tag{8.27}$$

## 8.5 从 chirplet 函数到复分数傅里叶变换[3]

对于两体关联系统，我们已经找到了纠缠的 Wigner 算符，在纠缠态表象$\langle\eta|$中可表示为

$$\Delta(\eta,\xi)=\int\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\pi^3}\,|\,\eta-\sigma\rangle\langle\eta+\sigma\,|\,\mathrm{e}^{\sigma\xi^*-\xi\sigma^*} \tag{8.28}$$

对应于密度矩阵$\rho$的 Wigner 函数是

$$W_\rho(\eta,\xi)=\int\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\pi^3}\langle\eta+\sigma\,|\,\rho\,|\,\eta-\sigma\rangle\mathrm{e}^{\sigma\xi^*-\xi\sigma^*} \tag{8.29}$$

算符$\hat{F}(Q_1, Q_2; P_1, P_2)$的经典 Weyl-Wigner 对应函数可根据公式

$$\hat{F}(Q_1,Q_2;P_1,P_2)=\int\mathrm{d}^2\eta\mathrm{d}^2\xi F(\eta,\xi)\Delta(\eta,\xi) \tag{8.30}$$

定出，即

$$F(\eta,\xi)=4\pi^2\mathrm{Tr}[\hat{F}(Q_1,Q_2;P_1,P_2)\Delta(\eta,\xi)]$$
$$=4\int\frac{d^2\sigma}{\pi}\langle\eta+\sigma|\hat{F}(Q_1,Q_2;P_1,P_2)|\eta-\sigma\rangle e^{\sigma\xi^*-\xi\sigma^*}$$
$$(8.31)$$

其中 $F(\eta,\xi)$是算符$\hat{F}(Q_1,Q_2;P_1,P_2)$的经典 Weyl 对应. 将式(8.31)代入式(8.1)得

$$\int\frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2}\exp[(\xi-\mu)(\eta^*-\nu^*)-(\eta-\nu)(\xi^*-\mu^*)]F(\eta,\xi)$$
$$=4\int\frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2}\exp[(\xi-\mu)(\eta^*-\nu^*)-(\eta-\nu)(\xi^*-\mu^*)]\times$$
$$\int\frac{d^2\sigma}{\pi}e^{\sigma\xi^*-\sigma^*\xi}\langle\eta+\sigma|\hat{F}(Q_1,Q_2;P_1,P_2)|\eta-\sigma\rangle$$
$$=4\int\frac{d^2\sigma d^2\eta}{\pi}\exp[-\mu(\eta^*-\nu^*)+\mu^*(\eta-\nu)]\delta^{(2)}(\eta-\nu-\sigma)\times$$
$$\langle\eta+\sigma|\hat{F}(Q_1,Q_2;P_1,P_2)|\eta-\sigma\rangle$$
$$=4\int\frac{d^2\sigma}{\pi}e^{\mu^*\sigma-\mu\sigma^*}\langle\nu+2\sigma|\hat{F}(Q_1,Q_2;P_1,P_2)|\nu\rangle\qquad(8.32)$$

由 $e^{\sigma\mu^*-\mu\sigma^*}=2\langle\xi_{=\mu}|2\sigma\rangle$ 和

$$\langle\nu+2\sigma|=\langle 2\sigma|\exp\left\{\frac{i}{\sqrt{2}}[\nu_1(P_1-P_2)-\nu_2(Q_1+Q_2)]\right\},\ \nu=\nu_1+i\nu_2$$
$$(8.33)$$

得 $4\int d^2\sigma e^{\sigma\mu^*-\mu\sigma^*}\langle\nu+2\sigma|$

$$=8\int d^2\sigma\langle\xi_{=\mu}|2\sigma\rangle\langle 2\sigma|\exp\left\{\frac{i}{\sqrt{2}}[\nu_1(P_1-P_2)-\nu_2(Q_1-Q_2)]\right\}$$
$$=2\pi\langle\xi_{=\mu}|\exp\left\{\frac{i}{\sqrt{2}}[\nu_1(P_1-P_2)-\nu_2(Q_1-Q_2)]\right\}$$
$$=2\pi\langle\xi_{=\mu}|e^{i(\mu_2\nu_1-\mu_1\nu_2)}\qquad(8.34)$$

因此式(8.32)变为

$$\int \frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2} \exp[(\xi-\mu)(\eta^*-\nu^*)-(\eta-\nu)(\xi^*-\mu^*)]F(\eta,\xi)$$
$$= 2\pi\langle \xi_{=\mu} \mid \hat{F}(Q_1, Q_2; P_1, P_2) \mid \nu\rangle e^{i(\mu_2\nu_1-\mu_1\nu_2)} \tag{8.35}$$

式(8.35)的逆变换亦可给出为

$$2\int \frac{d^2\mu d^2\nu}{\pi} \exp[(\xi^*-\mu^*)(\eta-\nu)-(\eta^*-\nu^*)(\xi-\mu)]\times$$
$$\langle \xi_{=\mu} \mid \hat{F}(Q_1, Q_2; P_1, P_2) \mid \nu\rangle e^{i(\mu_2\nu_1-\mu_1\nu_2)}$$
$$= F(\eta,\xi) \tag{8.36}$$

式(8.35)和式(8.36)给出了经典函数 $F(\eta,\xi)$和其 Weyl-Wigner 对应算符$\hat{F}(Q_1, Q_2; P_1, P_2)$相互变换的一个新公式,丰富了量子相空间理论. 作为这一新理论的应用,考虑下面的 Weyl-Wigner 对应式

$$\frac{4}{(e^f+1)^2}\exp\left[\frac{e^f-1}{e^f+1}(|\eta|^2+|\xi|^2)\right]$$
$$\to \exp\left\{\frac{f}{4}[(Q_1-Q_2)^2+(P_1+P_2)^2+(Q_1+Q_2)^2+(P_1-P_2)^2-4]\right\}$$
$$= \exp[f(a^\dagger a+b^\dagger b)] \tag{8.37}$$

代人式(8.35)有

$$\frac{4}{(e^f+1)^2}\int \frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2} \exp[(\xi-\mu)(\eta^*-\nu^*)-(\eta-\nu)(\xi^*-\mu^*)]\times$$
$$\exp\left[\frac{e^f-1}{e^f+1}(|\eta|^2+|\xi|^2)\right]$$
$$= 2\pi\langle \xi_{=\mu} \mid \exp[f(a^\dagger a+b^\dagger b)] \mid \nu\rangle e^{i(\mu_2\nu_1-\mu_1\nu_2)} \tag{8.38}$$

对于高斯积分公式

$$\int \frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2} \exp[(\xi-\mu)(\eta^*-\nu^*)-(\eta-\nu)(\xi^*-\mu^*)]e^{-\lambda(|\eta|^2+|\xi|^2)}$$

$$
= \frac{1}{1+\lambda^2}\exp\left[-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}(|\mu|^2+|\nu|^2)+\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}(\mu\nu^*-\mu^*\nu)\right]
\tag{8.39}
$$

如果取 $\lambda=-\mathrm{i}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$ 或者 $f=\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$，$\mathrm{e}^f=\mathrm{ie}^{-\mathrm{i}\alpha}$，那么有

$$
\frac{-\lambda}{\lambda^2+1}=\frac{\mathrm{i}}{2\tan\alpha},\ \frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sin\alpha}
\tag{8.40}
$$

因此式(8.39)的左边就变为

$$
\frac{4}{(\mathrm{ie}^{-\mathrm{i}\alpha}+1)^2}\int\frac{\mathrm{d}^2\xi\mathrm{d}^2\eta}{\pi^2}\exp[(\xi-\mu)(\eta^*-\nu^*)-(\eta-\nu)(\xi^*-\mu^*)]\times
$$
$$
\exp\left[\mathrm{i}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)(|\eta|^2+|\xi|^2)\right]
$$
$$
=\frac{1}{\mathrm{i}\sin\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}(|\mu|^2+|\nu|^2)}{2\tan\alpha}-\frac{\mu\nu^*-\mu^*\nu}{2\sin\alpha}+\mathrm{i}(\mu_2\nu_1-\mu_1\nu_2)\right]
\tag{8.41}
$$

其中 $\exp\left[\mathrm{i}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)(|\eta|^2+|\xi|^2)\right]$ 代表一个无限长的啁啾函数. 综上所述，得到

$$
\langle\xi_{=\mu}|\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)(a^\dagger a+b^\dagger b)\right]|\nu\rangle
$$
$$
=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}\sin\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}(|\mu|^2+|\nu|^2)}{2\tan\alpha}-\frac{\mu\nu^*-\mu^*\nu}{2\sin\alpha}\right]
\tag{8.42}
$$

式(8.42)的右边 $\exp\left[\frac{\mathrm{i}(|\mu|^2+|\nu|^2)}{2\tan\alpha}-\frac{\mu\nu^*-\mu^*\nu}{2\sin\alpha}\right]$ 就是复分数傅里叶变换的积分核，文献表明，该积分核可以经过旋转的像散光学系统模仿量子纠缠而得到.

# 参考文献

[1] Lv Cuihong, Fan Hongyi. A New Kind of Integration Transformation in Phase Space Related to Two Mutually Conjugate Entangled-State Representations and Its Uses in Weyl Ordering of Operators [J]. Chin. Phys. Lett., 2010,27:050301.

[2] Fan Hongyi, Yuan Hongchun. New transformation of Wigner operator in phase space quantum mechanics for the two-mode entangled case [J]. Chin. Phys. B, 2010, 19(7):070301.

[3] Fan Hongyi, Lv Cuihong. New complex integration transformation and its compatibility with complex Weyl-Wigner transformation and entangled state representation [J]. J. Opt. Soc. Am. A, 2009,26:1.

# 第 9 章　量子 Tomography 理论和 Fresnel 变换的关系

层析成像（Tomography）也称计算机层析（断层）成像（Computerized Tomography, CT）或计算机辅助层析成像（Computerized Assisted Tomography, CAT），是指在不损伤研究对象内部结构的条件下，利用某种探测源，根据从对象外部设备所获得的投影数据，运用一定的数学模型和重建技术，借助计算机生成对象内部的二维或三维图像，重现对象内部特征. 层析成像不同于从“图像到图像”的常规计算机图像处理技术，而是由投影数据重建反映对象内部特征的图像，是一类特殊的图像处理技术，常称为“图像重建”. 具体点说，经典的 X 射线断层摄影术是从一大组一维函数的知识构造出一个未知的两维函数 $D(x, y)$. 在医学上的应用就是把 X 射线穿过人体某部位的一个二维层面，X 射线被吸收后给出一个信息（相），把在不同的直线方向上的“相”加成一个密度函数，以形成一个一维函数 $F(0, x)$，然后让人体转动多个角度 $\theta_n$，得到 $F(\theta_n, s)$，$s$ 是坐标原点到 X 射线的距离

$$F(\theta_n, s) = RT\{D(x, y)\}$$
$$D(x, y) = (RT)^{-1}\{F(\theta_n, s)\}$$

其中 $T$ 代表量子 Tomography 操作，$R$ 是转动操作.

根据海森堡测不准原理，如果我们测量坐标就无法同时得到动量的精确值，即无法同时精确地得到量子态的所有信息. 但是可以通过对相同的量子态做大量的观测来得到多方面的信息，那么能否从这一系列的实验数据中推断出量子态呢？答案是肯定的.

在 Wigner 函数的基础上，物理学家发展了量子力学中的 Tomography（断层摄影术）理论[1]，该理论的内涵是：只要测定了

某个光场的 Wigner 函数的各个方向的边缘分布，就可以了解到光场的全部信息（在医学检验中，无损伤探测 CT 扫描投影成像是平面的，但由 Tomography 理论，就可以推断出三维图像）.

本章将在 Wigner 算符的 Radon 变换的基础上，详细介绍量子 Tomography 理论.

## 9.1 傅里叶切片定理在 Wigner 算符理论中的应用

本节利用有序算符内的积分技术和 Weyl 编序理论，把傅里叶切片定理应用到 Wigner 算符理论中，得到了某个纯态的投影算符. 再进一步研究发现：此态是完备的，可构成量子力学新表象. 引入此态的共轭态，由这两个相互共轭态构造了广义 Wigner 算符，经过研究发现态 $\psi$ 的新的广义 Wigner 函数的边缘分布恰好是量子 tomogram，该结果非常有助于量子力学中的层析成像（Tomography）理论的研究. 这不仅丰富和发展了量子相空间分布函数理论，而且开辟了寻找量子力学表象的新途径.

在量子力学中鉴于海森堡不确定性原理，同时确定粒子的坐标 $x$ 和动量 $p$ 是不可能的，于是，也就难于确定相空间中粒子的代表点. 然而，在 1932 年 Wigner 是第一个引入类似于经典概率分布函数的人（该函数也就称为 Wigner 函数）. 今天，Wigner 函数理论成为量子统计的主要课题之一. Feynman 总结了 Wigner 函数的思想是基于提出如下问题：在量子力学中是否存在分布函数 $W(x, p)$ 满足如下关系（为了讨论方便，本章用 $x$、$X$ 来标记坐标及坐标算符）

$$\mathrm{P}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, p)\mathrm{d}x, \tag{9.1}$$

$$\mathrm{P}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, p)\mathrm{d}p. \tag{9.2}$$

其中 $\mathrm{P}(x)$[$\mathrm{P}(p)$]是在坐标空间（动量空间）找到粒子在位置 $x$（具

有动量 $p$)的概率,式(9.1)和式(9.2)的解恰好是 Wigner 函数,$P(x)[P(p)]$被称为 Wigner 函数的两个边缘分布.在一维情形下,由密度矩阵 $\rho$ 描述的量子态的 Wigner 函数定义为:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[\rho\Delta(x, p)] &= W(x, p) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\langle x+\frac{v}{2}\right|\rho\left| x-\frac{v}{2}\right\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}pv}\mathrm{d}v, \ \hbar = 1. \end{aligned} \tag{9.3}$$

其中

$$\Delta(x, p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left| x-\frac{v}{2}\right\rangle\left\langle x+\frac{v}{2}\right| \mathrm{e}^{-\mathrm{i}pv}\mathrm{d}v \tag{9.4}$$

就是 Wigner 算符.

首先简要介绍一下傅里叶切片定理[2-6].它又被称为傅里叶投影定理,该定理是层析成像图像重建中的一个重要定理.它是针对实际二维空间而提出的.

令 $f(x, p)$表示图像函数,$(x, p)$平面上一条射线方程为

$$x\cos\theta + p\sin\theta = t. \tag{9.5}$$

沿一组由 $\theta$ 决定的射线取 $f(x, p)$的积分而组成的投影称为平行投影 $P_\theta(t)$.显然,当投影角度 $\theta$ 固定时,$P_\theta(t)$仅为 $t$ 的函数.

相空间原函数 $f(x, p)$的二维傅里叶变换为

$$F(u, v) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(ux+vp)}\mathrm{d}x\mathrm{d}p. \tag{9.6}$$

定义在坐标系$(t, s)$中沿 $t$ 方向的投影 $P_\theta(t)$

$$\begin{aligned} P_\theta(t) &= \int_{(\theta, t)\mathrm{line}} f(x, p)\mathrm{d}s \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, p)\delta(t - x\cos\theta - p\sin\theta)\mathrm{d}x\mathrm{d}p, \end{aligned} \tag{9.7}$$

其中坐标系 $t-s$ 与原坐标系 $x-p$ 的转换关系为

$$\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}, \tag{9.8}$$

$P_\theta(t)$的一维傅里叶变换为 $S_\theta(\lambda)$，其表达式为

$$S_\theta(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_\theta(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t} \mathrm{d}t, \tag{9.9}$$

用关系式(9.7)，可得傅里叶切片定理表达式

$$S_\theta(\lambda) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ p) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x\cos\theta + p\sin\theta)} \mathrm{d}x\mathrm{d}p \tag{9.10}$$

它又称傅里叶投影定理，可记为

$$S_\theta(\lambda) = F(\lambda\cos\theta,\ \lambda\sin\theta) \tag{9.11}$$

由此可见，图像 $f(x,\ p)$沿与 $x$ 轴成 $\theta$ 角的直线投影 $P_\theta(t)$的一维傅里叶变换，等于图像 $f(x,\ p)$的二维傅里叶变换 $F(u,\ \nu)$在其“空间”频率($u=\lambda\cos\theta,\ \nu=\lambda\sin\theta$)的值. 当投影数据个数 $N\to\infty$，即可获得无穷多的投影数据时，我们就可以得到 $F(u,\ \nu)$在平面$(u,\ \nu)$上的所有值，再由二维傅里叶逆变换

$$f(x,\ p) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F(u,\ \nu) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(ux+p\nu)} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{9.12}$$

重建图像. 因此傅里叶切片定理是研究准射线层析成像(Tomography)理论和构成实际图像重建算法的基础.

取特殊情况，当 $\theta = 0$ 时，可见

$$S_{\theta=0}(u) = F(u,\ 0). \tag{9.13}$$

以下探讨将傅里叶切片理论应用到 Wigner 算符理论中会出现什么样的结果.

### 9.1.1 Wigner 算符的傅里叶切片变换

将傅里叶切片定理写为更通用的形式

$$S_{\mu,\nu}(\lambda)=\iint_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x\mu+p\nu)}\mathrm{d}x\mathrm{d}p \tag{9.14}$$

其中 $\mu$ 和 $\nu$ 都是实参数，把式(9.14)中的 $f(x,\ p)$ 用 Wigner 算符代替，并利用式(4.28)和有序算符内的积分技术，可以得到

$$\begin{aligned}&\iint_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\mathrm{d}p\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x\mu+p\nu)}\Delta(x,\ p)\\&=\iint_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\mathrm{d}p\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x\mu+p\nu)}\vdots\delta(x-X)\delta(p-P)\vdots\\&=\vdots\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(X\mu+P\nu)}\vdots=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(X\mu+P\nu)},\end{aligned} \tag{9.15}$$

对比式(9.15)和式(9.11)并结合式(9.9)，我们猜测 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(X\mu+P\nu)}$ 是某个投影算符的傅里叶变换，假设该投影算符为 $|x\rangle_{\mu,\nu\,\mu,\nu}\langle x|$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(X\mu+P\nu)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\ |\ x\rangle_{\mu,\nu\,\mu,\nu}\langle x\ |\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}. \tag{9.16}$$

另一方面，将式(9.16)与式(9.9)和式(9.7)比较，可以看出 $|x\rangle_{\mu,\nu\,\mu,\nu}\langle x|$ 应当是沿某些定向的积分，

$$|\ x\rangle_{\mu,\nu\,\mu,\nu}\langle x\ |=\iint_{-\infty}^{+\infty}\Delta(x',\ p')\delta(x-x'\mu-p'\nu)\mathrm{d}x'\mathrm{d}p' \tag{9.17}$$

现在求解满足上述关系的态矢量 $|\ x\rangle_{\mu,\nu}$. 把式(4.12)代入式(9.17)并借助有序算符内的积分技术得

$$\begin{aligned}&\iint_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p'\mathrm{d}x'\delta(x-\mu x'-\nu p')\ \frac{1}{\pi}:\mathrm{e}^{-(p'-P)^2-(x'-X)^2}:\\&=\frac{1}{\pi\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p':\mathrm{e}^{-(p-P)^2-\left(\frac{x-\nu p}{\mu}-X\right)^2}:\\&=\sqrt{\frac{1}{\pi(\mu^2+\nu^2)}}:\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mu^2+\nu^2}[x-(\mu X+\nu P)]^2}:.\end{aligned} \tag{9.18}$$

利用真空态的投影算符

$$|0\rangle\langle 0| = :\mathrm{e}^{-a^\dagger a}:,\tag{9.19}$$

可以分解式(9.18)的右边为

$$\begin{aligned}&[\pi(\mu^2+\nu^2)]^{-1/2}:\exp\left\{-\frac{x^2}{\mu^2+\nu^2}+\sqrt{2}x\left(\frac{a^\dagger}{\mu-\mathrm{i}\nu}+\frac{a}{\mu+\mathrm{i}\nu}\right)-\right.\\&\left.a^\dagger a-\frac{\mu+\mathrm{i}\nu}{2(\mu-\mathrm{i}\nu)}a^{\dagger 2}-\frac{\mu-\mathrm{i}\nu}{2(\mu+\mathrm{i}\nu)}a^2\right\}:\\&=|x\rangle_{\mu,\nu\,\mu,\nu}\langle x|,\end{aligned}\tag{9.20}$$

从式(9.20)中可以看出$|x\rangle_{\mu,\nu}$的显式为

$$\begin{aligned}&|x\rangle_{\mu,\nu}\\&=[\pi(\mu^2+\nu^2)]^{-1/4}\exp\left[-\frac{x^2}{2(\mu^2+\nu^2)}+\frac{\sqrt{2}xa^\dagger}{\mu-\mathrm{i}\nu}-\frac{\mu+\mathrm{i}\nu}{2(\mu-\mathrm{i}\nu)}a^{\dagger 2}\right]|0\rangle.\end{aligned}\tag{9.21}$$

考虑特殊情况:当$\mu=1$, $\nu=0$时,式(9.20)化为如下形式

$$|x\rangle_{\mu,\nu\,\mu,\nu}\langle x|\rightarrow\frac{1}{\sqrt{\pi}}:\mathrm{e}^{-(x-X)^2}:=|x\rangle\langle x|,\tag{9.22}$$

当$\mu=0$, $\nu=1$时,式(9.20)化为

$$|x\rangle_{\mu,\nu\,\mu,\nu}\langle x|\rightarrow\frac{1}{\sqrt{\pi}}:\mathrm{e}^{-(p-P)^2}:=|p\rangle\langle p|\tag{9.23}$$

所以称$|x\rangle_{\mu,\nu}$是介于坐标表象与动量表象间的一个新表象.利用有序算符内的积分技术,可以发现其满足完备性关系

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,|x\rangle_{\mu,\nu\,\mu,\nu}\langle x|=\frac{1}{\sqrt{\pi(\mu^2+\nu^2)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x:\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mu^2+\nu^2}[x-(\mu X+\nu P)]^2}:=1,\tag{9.24}$$

从式(9.24)和式(9.21),可以看出$|x\rangle_{\mu,\nu}$正是算符$X\mu+P\nu$的本征矢

$$(X\mu+P\nu)|x\rangle_{\mu,\nu}=x|x\rangle_{\mu,\nu}\tag{9.25}$$

根据 Weyl 量子化规则,式(9.17)中的函数$\delta(x-x'\mu-p'\nu)$可以

作为算符$|x\rangle_{\mu,\nu\mu,\nu}\langle x|$的经典对应. 把式(4.28)代入式(9.17)可以得到$|x\rangle_{\mu,\nu\mu,\nu}\langle x|$的 Weyl 编序形式,

$$
\begin{aligned}
|x\rangle_{\mu,\nu\mu,\nu}\langle x| &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p'\mathrm{d}x'\delta(x-\nu p'-\mu x') \vdots \delta(x'-X)\delta(p'-P) \vdots \\
&= \vdots \delta(x-\nu P-\mu X) \vdots .
\end{aligned} \tag{9.26}
$$

将上面结果与标准 Radon 变换关系[9]作比较,可以得出结论: $|x\rangle_{\mu,\nu\mu,\nu}\langle x|$正是 Wigner 算符的 Radon 变换,Wigner 算符的 Radon 变换关系式为

$$
\iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x'\mathrm{d}p'\delta(x-\mu x'-\nu p')\Delta(x',p') = |x\rangle_{\mu,\nu\mu,\nu}\langle x| \tag{9.27}
$$

由此可见态矢$|x\rangle_{\mu,\nu}$的引入是不可避免的. 这样,我们就从傅里叶切片定理发现了一个新表象,对于任何态$|\psi\rangle$,它的 Wigner 函数

$$
W(x',p') = \langle\psi|\Delta(x',p')|\psi\rangle \tag{9.28}
$$

和波函数$_{\mu,\nu}\langle x|\psi\rangle$的模平方之间的关系就建立起来了

$$
\iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x'\mathrm{d}p'\delta(x-\mu x'-\nu p')W(x',p') = |\langle\psi|x\rangle_{\mu,\nu}|^2 \tag{9.29}
$$

根据量子态的 Tomogram 的定义,我们知道$|\langle\psi|x\rangle_{\mu,\nu}|^2$就是$|\psi\rangle$的 tomogram. 由此可见,引入态矢$|x\rangle_{\mu,\nu}$有助于研究量子态的层析理论(Tomography).

例如,若$|\psi\rangle$是一个非归一化的相干态$|z\rangle = \exp(za^{\dagger})|0\rangle$,其量子 tomogram 为

$$
\begin{aligned}
&|\langle z|x\rangle_{\mu,\nu}|^2 \\
&= [\pi(\mu^2+\nu^2)]^{-1/2}\exp\left\{-\frac{x^2}{\mu^2+\nu^2}\right\}\left|\exp\left[\frac{\sqrt{2}x}{\mu-\mathrm{i}\nu}z^{*}+\frac{(\mu+\mathrm{i}\nu)}{2(\mu-\mathrm{i}\nu)}z^{*2}\right]\right|^2 .
\end{aligned} \tag{9.30}
$$

再如粒子数态$|n\rangle$，由厄米多项式(2.18)可以得到

$$
\begin{aligned}
&\langle n \mid x\rangle_{\mu,\nu} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{\partial^n}{\partial z^{*n}} \langle z \mid x\rangle_{\mu,\nu} \big|_{z^*=0} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}[\pi(\mu^2+\nu^2)]^{1/4}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(\mu^2+\nu^2)}\right\} \mathrm{H}_n\left(\mathrm{i}\sqrt{\frac{x^2}{\mu^2+\nu^2}}\right),
\end{aligned} \tag{9.31}
$$

所以粒子数态的 Tomogram 是

$$
\begin{aligned}
&|\langle n \mid x\rangle_{\mu,\nu}|^2 \\
&= \frac{1}{n![\pi(\mu^2+\nu^2)]^{1/2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(\mu^2+\nu^2)}\right\} \left[\mathrm{H}_n\left(\mathrm{i}\sqrt{\frac{x^2}{\mu^2+\nu^2}}\right)\right]^2.
\end{aligned} \tag{9.32}
$$

### 9.1.2 态矢$|x\rangle_{\mu,\nu}$的性质

现在计算内积$\langle x'|x\rangle_{\mu,\nu}$，其中$|x'\rangle$为普通坐标本征态，由

$$
\begin{aligned}
&\langle x' \mid (\mu X+\nu P) \mid x\rangle_{\mu,\nu} \\
&= \left(\mu x' - \mathrm{i}\nu \frac{\partial}{\partial x'}\right) \langle x' \mid x\rangle_{\mu,\nu} \\
&= x\langle x' \mid x\rangle_{\mu,\nu}.
\end{aligned} \tag{9.33}
$$

可以解得

$$
\langle x' \mid x\rangle_{\mu,\nu} = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}x'\left(x-\mu\frac{x'}{2}\right)/\nu}, \tag{9.34}
$$

其中$c$是归一化常数，其大小可以由下式求得

$$
\begin{aligned}
\langle x' \mid x''\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \langle x' \mid x\rangle_{\mu,\nu\,\mu,\nu}\langle x \mid x''\rangle \\
&= |c|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{x'}{\nu}-\frac{x''}{\nu}\right)x + \mathrm{i}\frac{\mu}{2\nu}(x''^2 - x'^2)\right]\mathrm{d}x \\
&= |c|^2 2\pi\nu\,\delta(x'-x'') = \delta(x'-x''),
\end{aligned} \tag{9.35}
$$

由此可见

$$\langle x' \mid x\rangle_{\mu,\nu} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}xx'}{\nu}-\frac{\mathrm{i}\mu}{2\nu}x'^2} \tag{9.36}$$

$|x\rangle_{\mu,\nu}$具有正交性

$$\begin{aligned} {}_{\mu,\nu}\langle x' \mid x''\rangle_{\mu,\nu} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x_{\mu,\nu}\langle x' \mid x\rangle\langle x \mid x''\rangle_{\mu,\nu} \\ &= \frac{1}{2\pi\nu}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\mathrm{i}\,\frac{xx'}{\nu} - \mathrm{i}\,\frac{xx''}{\nu} - \frac{\mathrm{i}\mu}{2\nu}(x'^2 - x''^2)\right]\mathrm{d}x \\ &= \delta(x' - x'') \end{aligned} \tag{9.37}$$

所以$|x\rangle_{\mu,\nu}$满足构成一个新的量子力学表象的条件，即正交完备性.

### 9.1.3 $|x\rangle_{\mu,\nu}$的共轭态矢$|p\rangle_{\sigma,\tau}$

在本节中将引入$|x\rangle_{\mu,\nu}$的共轭态$|p\rangle_{\sigma,\tau}$[10]. 利用式(4.12)完成下列 Wigner 算符的 Radon 变换

$$\begin{aligned} &\iint_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x'\mathrm{d}p'\delta(p - \sigma x' - \tau p')\Delta(x',\ p') \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi(\sigma^2+\tau^2)}}:\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sigma^2+\tau^2}[p-(\sigma X+\tau P)]^2}:. \end{aligned} \tag{9.38}$$

其中$(\sigma,\tau)$是两个独立的实参数. 利用式(9.19)，可以将式(9.38)的正规排序指数算符分开为

$$\exp\left[-\frac{p^2}{2(\sigma^2+\tau^2)} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{2}p}{\tau+\mathrm{i}\sigma}a^\dagger + \frac{\tau-\mathrm{i}\sigma}{2(\tau+\mathrm{i}\sigma)}a^{\dagger 2}\right]\times$$

$$|0\rangle\langle 0|\exp\left[\frac{-\mathrm{i}\sqrt{2}p}{\tau-\mathrm{i}\sigma}a + \frac{\tau-\mathrm{i}\sigma}{2(\tau+\mathrm{i}\sigma)}a^2\right]. \tag{9.39}$$

通过引入新态矢

$$|p\rangle_{\sigma,\tau} = [\pi(\sigma^2+\tau^2)]^{-1/4}\exp\left[-\frac{p^2}{2(\sigma^2+\tau^2)} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{2}p}{\tau+\mathrm{i}\sigma}a^\dagger + \right.$$

$$\left.\frac{\tau-\mathrm{i}\sigma}{2(\tau+\mathrm{i}\sigma)}a^{\dagger 2}\right]|0\rangle, \tag{9.40}$$

可以得到

$$\iint_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x'\mathrm{d}p'\delta(p-\sigma x'-\tau p')\Delta(x',p')=|p\rangle_{\sigma,\tau\sigma,\tau}\langle p| \tag{9.41}$$

它表明纯态密度算符$|p\rangle_{\sigma,\tau\sigma,\tau}\langle p|$是 Wigner 算符的另一个 Radon 变换. $|p\rangle_{\sigma,\tau}$满足完备性关系,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,|p\rangle_{\sigma,\tau\sigma,\tau}\langle p|=\frac{1}{\sqrt{\pi(\sigma^2+\tau^2)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p:\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sigma^2+\tau^2}[p-(\sigma X+\tau P)]^2}:=1, \tag{9.42}$$

$|p\rangle_{\sigma,\tau}$亦满足正交性

$${}_{\sigma,\tau}\langle p'|p\rangle_{\sigma,\tau}=\delta(p'-p). \tag{9.43}$$

于是态矢$|p\rangle_{\sigma,\tau}$是完备正交的. 可以看出$|p\rangle_{\sigma,\tau}$是算符$(\tau P+\sigma X)$的本征矢

$$(\tau P+\sigma X)|p\rangle_{\sigma,\tau}=p|p\rangle_{\sigma,\tau} \tag{9.44}$$

如果要求$(X\mu+P\nu)$和$(\tau P+\sigma X)$是互为共轭的算符,那么它们必须满足以下条件

$$\mu\tau-\sigma\nu=1 \tag{9.45}$$

这时有

$$[(X\mu+P\nu),(\tau P+\sigma X)]=\mathrm{i} \tag{9.46}$$

这时$|x\rangle_{\mu,\nu}$与$|p\rangle_{\sigma,\tau}$是两个互为共轭的态,$(X\mu+P\nu)$和$(\tau P+\sigma X)$在相空间中是两个新的正交量.

另一方面,根据

$${}_{\mu,\nu}\langle x|(\tau P+\sigma X)|p\rangle_{\sigma,\tau}=p_{\mu,\nu}\langle x|p\rangle_{\sigma,\tau}=-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}{}_{\mu,\nu}\langle x|p\rangle_{\sigma,\tau}$$

$$ {}_{\mu,\nu}\langle x \mid (\nu P + \mu X) \mid p\rangle_{\sigma,\tau} = x\,{}_{\mu,\nu}\langle x \mid p\rangle_{\sigma,\tau} = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\,{}_{\mu,\nu}\langle x \mid p\rangle_{\sigma,\tau} \tag{9.47} $$

可以求得如下关系式

$$ {}_{\mu,\nu}\langle x \mid P = (\mu p - \sigma x)\,{}_{\mu,\nu}\langle x \mid \tag{9.48} $$

$$ {}_{\sigma,\tau}\langle p \mid X = (\tau x - \nu p)\,{}_{\sigma,\tau}\langle p \mid \tag{9.49} $$

### 9.1.4 利用态矢 $|x\rangle_{\mu,\nu}$ 和 $|p\rangle_{\sigma,\tau}$ 构造新的广义 Wigner 算符

由式(9.24)和式(9.42)可以构建一个新的广义 Wigner 算符

$$ \Delta_{\text{new}}(x,\,p) = \frac{1}{\pi\sqrt{(\mu^2+\nu^2)(\sigma^2+\tau^2)}} : \mathrm{e}^{-\frac{1}{\sigma^2+\tau^2}[p-(\sigma X+\tau P)]^2-\frac{1}{\mu^2+\nu^2}[x-(\mu X+\nu P)]^2} :, \tag{9.50} $$

它是由以下积分结果得到的

$$ \Delta_{\text{new}}(x,\,p) = \iint_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x'\mathrm{d}p'\iint_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x''\mathrm{d}p''\delta(x-\mu x'-\nu p')\times \delta(p-\sigma x''-\tau p'')\,\frac{1}{\pi^2} : \mathrm{e}^{-(x'-X)^2-(p'-P)^2-(x''-X)^2-(p''-P)^2} :, \tag{9.51} $$

这是因为完成对 $\mathrm{d}x$ 的积分导致以下结果

$$ \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\Delta_{\text{new}}(x,\,p) = |\,p\rangle_{\sigma,\tau\,\sigma,\tau}\langle p\,|, \tag{9.52} $$

而完成对 $\mathrm{d}p$ 的积分则得到

$$ \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p\Delta_{\text{new}}(x,\,p) = |\,x\rangle_{\mu,\nu\,\mu,\nu}\langle x\,|. \tag{9.53} $$

与式(4.68)和式(4.69)比较,看到 $\Delta_{\text{new}}(x,\,p)$ 具有和普通 Wigner

算符相似的意义.这也是为何我们命名 $\Delta_{new}(x, p)$为广义 Wigner 算符的原因.进一步比较式(9.52)、(9.53)和式(9.27)、(9.41),我们发现

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} dx' dp' \delta(p - \sigma x' - \tau p') \Delta(x', p') = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Delta_{new}(x, p), \tag{9.54}$$

及

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} dx' dp' \delta(x - \mu x' - \nu p') \Delta(x', p') = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \Delta_{new}(x, p). \tag{9.55}$$

对于给定的态 $|\Psi\rangle$ 的 Wigner 函数 $W_\Psi(x, p) = \langle \Psi | \Delta_{new}(x, p) | \Psi \rangle$,发现它具有以下边缘分布

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} dx W_\Psi(x, p) \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} dx' dp' \delta(p - \sigma x' - \tau p') \langle \Psi | \Delta(x', p') | \Psi \rangle \\ &= | \Psi(p)_{\sigma, \tau} |^2, \end{aligned} \tag{9.56}$$

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} dp W_\Psi(x, p) \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} dx' dp' \delta(x - \mu x' - \nu p') \langle \Psi | \Delta(x', p') | \Psi \rangle \\ &= | \Psi(x)_{\mu, \nu} |^2. \end{aligned} \tag{9.57}$$

其中 $|\Psi(p)_{\sigma,\tau}|^2[|\Psi(x)_{\mu,\nu}|^2]$ 与在 $|p\rangle_{\sigma,\tau}[|x\rangle_{\mu,\nu}]$ 表象中找到粒子的概率成正比.由于 $[|\Psi(x)_{\mu,\nu}|^2]$ $|\Psi(p)_{\sigma,\tau}|^2$ 被称为量子 tomogram,于是这个新 Wigner 函数的边缘分布就是量子 tomogram.最后,可以看到这个新 Wigner 算符也是完备的

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p\mathrm{d}x\Delta_{\mathrm{new}}(x,\ p) = 1. \tag{9.58}$$

另外，由式(9.24)和式(9.42)还可构造另一新的广义 Wigner 算符 $\Delta'_{\mathrm{new}}(x,\ p)$，其表达式为

$$\Delta'_{\mathrm{new}}(x,\ p) = \frac{1}{\pi\sqrt{(\mu^2+\nu^2)(\sigma^2+\tau^2)(1-\eta^2)}} \times \\ \vdots \exp\left\{-\frac{1}{1-\eta^2}\left\{\frac{[x-(\mu X+\nu P)]^2}{\mu^2+\nu^2} - \frac{2\eta[x-(\mu X+\nu P)][p-(\sigma X+\tau P)]}{\sqrt{(\mu^2+\nu^2)(\sigma^2+\tau^2)}} - \frac{[p-(\sigma X+\tau P)]^2}{\sigma^2+\tau^2}\right\}\right\} \vdots, \tag{9.59}$$

其中 $\eta$ 是相关系数，式(9.59)与统计学中随机变量的二维正态分布类似，是一种广义 Wigner 算符，因为对它进行 $\mathrm{d}x$ 积分将导致

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\Delta'_{\mathrm{new}}(x,\ p) = |\ p\rangle_{\sigma,\tau\ \sigma,\tau}\langle p\ |, \tag{9.60}$$

而对 $\mathrm{d}p$ 积分导致

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p\Delta'_{\mathrm{new}}(x,\ p) = |\ x\rangle_{\mu,\nu\ \mu,\nu}\langle x\ |. \tag{9.61}$$

式(9.60)和式(9.61)对于学习量子 tomogram 是很有用的，因为 $|_{\mu,\nu}\langle x|\psi\rangle|^2[|_{\sigma,\tau}\langle p|\psi\rangle|^2]$就是态$|\psi\rangle$的 tomogram.

通过把量子统计中的 Wigner 算符应用到经典傅里叶切片理论中，导出态矢$|x\rangle_{\mu,\nu}$，这不仅开辟了寻找量子力学表象的新途径，而且进一步研究发现该态的投影算子$|x\rangle_{\mu,\nu\ \mu,\nu}\langle x|$正是 Wigner 算符的 Radon 变换. 在此基础上我们又引入$|x\rangle_{\mu,\nu}$的共轭态$|p\rangle_{\sigma,\tau}$，利用这两个态建立了包括新的广义 Wigner 算符在内的量子相空间理论. 研究发现态 $\psi$ 的新的广义 Wigner 函数的边缘分布恰好是量子 tomogram. 因此，态矢$|x\rangle_{\mu,\nu}$和$|p\rangle_{\sigma,\tau}$的引入有助于

研究量子态的层析理论(Tomography). 同时还揭示了广义 Wigner 算符与统计学中的随机变量的二维正态分布形式上的类似,于是统计学中计算的结果可直接应用到量子力学中的 Wigner 函数理论和 tomogram 理论中去.

附:CT 的基本原理

一束光强为 $I_0$ 的 X 射线沿 $\boldsymbol{n}$ 方向入射到物体上,物体在 $\boldsymbol{x}$ 点处对 X 射线的吸收能力为 $\rho(\boldsymbol{x})$(一般来说 $\rho(\boldsymbol{x})$ 正比于物体在 $\boldsymbol{x}$ 点的密度). 因此沿着光路有光强变化方程

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s} = -\rho(\boldsymbol{x})I$$

积分得出射光强为 $I = I_0 \exp\left[-\int \rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}s\right]$,积分对光线所在直线进行,$\mathrm{d}s$ 是直线线元长. 把 $\boldsymbol{x}$ 分解为 $\boldsymbol{x} = s\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\tau}$,这里的 $\boldsymbol{\tau}$ 是垂直于 $\boldsymbol{n}$ 的矢量,于是 $P(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\tau}) = \ln\frac{I_0}{I} = \int \rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(s\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\tau})\mathrm{d}s$ 是可测量的.

实际操作时可以把物体看成由许多二维平面堆积而成,只需研究二维情况(层析),然后再把分析结果组合成三维图像.

在二维情况下

$$\begin{aligned} P(\theta, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(s\cos\theta - \tau\sin\theta,\ s\sin\theta + \tau\cos\theta)\mathrm{d}s \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y)\delta(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n} - \tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

这就是 Radon 变换. 通过反变换即可从 $P(\theta, \tau)$ 得到 $\rho(x, y)$——重构.

## 9.2 关于 Radon 变换的定理一则[11]

利用这个定理可以由 Wigner 算符的 Radon 变换产生连续变

量的多模纠缠态密度算符，这为我们获得多模纠缠态表象提供了一个新的方法．下面给出这个定理．

**定理**：假设$|r\rangle$是厄米算符 $\hat{R}\equiv\hat{R}(X, P)$ 的本征态，即满足 $\hat{R}|r\rangle=r|r\rangle$，$\langle r|r'\rangle=\delta(r-r')$，并且算符$\hat{R}$是 Weyl 编序好了的，即$\hat{R}=\vdots\hat{R}\vdots$，那么

$$|r\rangle\langle r|=\int \mathrm{d}p\mathrm{d}x\delta[r-R(x, p)]\Delta(x, p) \tag{9.62}$$

其中 $R(x, p)$是算符$\hat{R}$的经典 Weyl 函数，$\Delta(x, p)$是 Wigner 算符．

下面证明这个定理．

根据 Weyl 对应规则，

$$\hat{R}=\int \mathrm{d}p\mathrm{d}xR(x, p)\Delta(x, p) \tag{9.63}$$

考虑到 $\hat{R}=\vdots\hat{R}\vdots$并且利用 $\delta$-函数的性质，有

$$\begin{aligned}|r\rangle&=\int \mathrm{d}r'\delta(r-r')|r'\rangle=\int \mathrm{d}r'\delta(r-\hat{R})|r'\rangle\\&=\int \mathrm{d}r'\vdots\delta(r-\hat{R})\vdots|r'\rangle\\&=\int \mathrm{d}r'\int \mathrm{d}p\mathrm{d}x\delta[r-R(x, p)]\vdots\delta(x-X)\delta(p-P)\vdots|r'\rangle\end{aligned} \tag{9.64}$$

再由 Wigner 算符的 Weyl 编序形式(4.28)立即给出

$$|r\rangle=\int \mathrm{d}r'\int \mathrm{d}p\mathrm{d}x\delta[r-R(x, p)]\Delta(x, p)|r'\rangle \tag{9.65}$$

与 $|r\rangle=\int \mathrm{d}r'|r\rangle\langle r|r'\rangle$ 作比较就得到式(9.62)．另一方面，根据 Weyl 对应规则以及式(9.64)，有

$$\int \mathrm{d}p\mathrm{d}x\delta[r-R(x,\ p)]\ \Delta(x,\ p) = \vdots\delta[r-\hat{R}(X,\ P)]\vdots \quad (9.66)$$

所以式(9.62)等价于

$$|\ r\rangle\langle r\ | = \vdots\delta[r-\hat{R}(X,\ P)]\vdots \quad (9.67)$$

定理得证.

## 9.3 复参数坐标-动量中介表象与 Fresnel 幺正变换算符

新表象的建立往往有助于发现新的幺正变换. 在 9.2 节中,通过引入一对实的参量$(\mu,\ \nu)$,已经建立了一个介于坐标和动量表象之间的表象——中介表象,发现该态的投影算子$|x\rangle_{\mu,\nu}\ {}_{\mu,\nu}\langle x|$正是 Wigner 算符的 Radon 变换. 本节将引进一对复参量$(s,\ r)$,导出坐标-动量中介表象的另外一种形式$|x\rangle_{s,r}$,发现其与坐标表象的内积恰好为 Fresnel 变换的积分核,即找到了经典光学中 Fresnel 变换的量子对应,这是该表象的一个重要应用.

若复参量$s$, $r$满足$|s|^2-|r|^2=1$,可以构造如下值为 1 的正规乘积内的 Gauss 型算符积分,即

$$\begin{aligned}1 &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{|s+r|\sqrt{\pi}}:\exp\left\{-\frac{1}{|s+r|^2}\left(x-\frac{s^*a+ra^\dagger+sa^\dagger+r^*a}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}:\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{|s+r|\sqrt{\pi}}:\exp\left\{-\left(\frac{s^*-r^*}{s^*+r^*}+\frac{s-r}{s+r}\right)\frac{x^2}{2}+\right.\\ &\quad\left.\sqrt{2}x\left(\frac{a^\dagger}{s^*+r^*}+\frac{a}{s+r}\right)-\frac{s+r}{s^*+r^*}\frac{a^{\dagger2}}{2}-\frac{s^*+r^*}{s+r}\frac{a^{\dagger2}}{2}-a^\dagger a\right\}:\end{aligned} \quad (9.68)$$

利用$|0\rangle\langle 0| = :\mathrm{e}^{-a^\dagger a}:$分解指数,就能提取出一个新的表象

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \mid x\rangle_{s,r\,s,r}\langle x \mid = 1 \tag{9.69}$$

其中

$$\mid x\rangle_{s,r} = \frac{\pi^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{s^* + r^*}} \exp\left\{-\frac{s^* - r^*}{s^* + r^*}\frac{x^2}{2} + \frac{\sqrt{2}x}{s^* + r^*}a^\dagger - \frac{s + r}{s^* + r^*}\frac{a^{\dagger 2}}{2}\right\} \mid 0\rangle. \tag{9.70}$$

这个态也称为复参数坐标-动量中介表象(请读者比较式(9.70)与式(9.21)),因为

$$\sqrt{2}[(s + r)a + (s^* + r^*)a^\dagger] \mid x\rangle_{s,r} = x \mid x\rangle_{s,r} \tag{9.71}$$

若令

$$s = \frac{1}{2}[A + D - \mathrm{i}(B - C)],\ r = -\frac{1}{2}[A - D + \mathrm{i}(B + C)], \tag{9.72}$$

即有 $s^* + r^* = D + \mathrm{i}B$, $s^* - r^* = A - \mathrm{i}C$, $AD - BC = 1$,则式(9.70)变为

$$\mid x\rangle_{s,r} = \frac{\pi^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{D + \mathrm{i}B}} \exp\left\{-\frac{A - \mathrm{i}C}{D + \mathrm{i}B}\frac{x^2}{2} + \frac{\sqrt{2}x}{D + \mathrm{i}B}a^\dagger - \frac{D - \mathrm{i}B}{D + \mathrm{i}B}\frac{a^{\dagger 2}}{2}\right\} \mid 0\rangle. \tag{9.73}$$

由

$$X = \frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2}},\ P = \mathrm{i}\,\frac{a^\dagger - a}{\sqrt{2}}. \tag{9.74}$$

则式(9.71)就是

$$(DX - BP) \mid x\rangle_{s,r} = x \mid x\rangle_{s,r}, \tag{9.75}$$

于是构造式(9.69)就有了一个更为简洁的写法

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\pi}}:\exp\{-(x-DX+BP)^2\}:. \qquad (9.76)$$

当$(D, B)=(1, 0)$,式(9.76)就变成了坐标表象完备性的 Gauss 积分形式;当$(D, B)=(0, -1)$,式(9.76)即为动量表象的完备性 Gauss 积分形式(只是这里的积分变量由 $p\rightarrow x$).

回忆坐标本征态的 Fock 表象表示式,用 IWOP 技术对投影算符$|x\rangle_{s,r}\langle x|$作 d$x$ 的积分得到

$$\begin{aligned}F(r, s) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\mid x\rangle_{s,r}\langle x\mid \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{s^*+r^*}\sqrt{\pi}}:\exp\left\{-\frac{s^*-r^*}{s^*+r^*}\frac{x^2}{2}+\frac{\sqrt{2}x}{s^*+r^*}a^\dagger-\right. \\ &\quad \left.\frac{s+r}{s^*+r^*}\frac{a^{\dagger 2}}{2}-\frac{x^2}{2}+\sqrt{2}xa-\frac{a^2}{2}-a^\dagger a\right\}: \\ &= \exp\left(-\frac{r}{2s^*}a^{\dagger 2}\right)\exp\left[\left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{1}{s^*}\right]\exp\left(\frac{r^*}{2s^*}a^2\right),\end{aligned}$$

$$(9.77)$$

这就是 Fresnel 算符,它正好是经典光学中 Fresnel 变换的量子对应,很容易看出

$$F(r, s)\mid x\rangle=\mid x\rangle_{s,r}, \qquad (9.78)$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\langle x'\mid(DX-BP)\mid x\rangle_{s,r} &= x\langle x'\mid x\rangle_{s,r} \\ &= \left(Dx'+\mathrm{i}B\frac{\partial}{\partial x'}\right)\langle x'\mid x\rangle_{s,r},\end{aligned}$$

$$(9.79)$$

式(9.79)的解是

$$\langle x' \mid x \rangle_{s,r} = N(x) \exp\left[\frac{\mathrm{i}(Dx'^2 - 2xx')}{2B}\right], \tag{9.80}$$

这里 $N(x)$将在下面的计算中定出，因为

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \mid x' \rangle \langle x' \mid x \rangle_{sr} \\
&= \mid x \rangle_{sr} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' \mid x' \rangle \exp\left[\frac{\mathrm{i}(Dx'^2 - 2xx')}{2B}\right] \\
&= N(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x'}{\pi^{\frac{1}{4}}} \exp\left[-\frac{1}{2}x'^2 + \sqrt{2}x'a^\dagger - \frac{a^{\dagger 2}}{2} + \frac{\mathrm{i}(Dx'^2 - 2xx')}{2B}\right] \mid 0 \rangle \\
&= \pi^{-\frac{1}{4}} N(x) \sqrt{\frac{2\pi\mathrm{i}B}{D + \mathrm{i}B}} \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}x^2}{2B(D + \mathrm{i}B)} + \frac{\sqrt{2}x}{D + \mathrm{i}B}a^\dagger - \right. \\
&\left. \frac{D - \mathrm{i}B}{D + \mathrm{i}B} \frac{a^{\dagger 2}}{2}\right\}.
\end{aligned} \tag{9.81}$$

将式(9.81)与式(9.80)比较，并考虑到 $AD - BC = 1$，则

$$\begin{aligned}
N(x) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}B}} \exp\left\{\left(\frac{\mathrm{i}}{B(D + \mathrm{i}B)} - \frac{A - \mathrm{i}C}{D + \mathrm{i}B}\right)\frac{x^2}{2}\right\} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}B}} \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2B}Ax^2\right),
\end{aligned} \tag{9.82}$$

联立式(9.78)，(9.80)和(9.82)得

$$\begin{aligned}
\langle x' \mid x \rangle_{sr} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}B}} \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2B}(Ax^2 - 2xx' + Dx'^2)\right) \\
&= \langle x' \mid F(r, s) \mid x \rangle_{sr},
\end{aligned} \tag{9.83}$$

可以看出，式(9.83)恰好就是光学 Fresnel 变换的积分核.

## 9.4 光学 Fresnel 变换与量子 tomography 的关系[12]

本节讨论光学 Fresnel 变换与量子光学中 Wigner 函数的

Radon 变换之间的关系. 人们常用参数为光传输矩阵元 $(A, B, C, D)(AD-BC=1)$ 的 Fresnel 积分来描述光学衍射变换,用 $f(x)$ 表示输入光场, $g(x')$ 表示输出光场,那么它们通过下面的 Fresnel 积分变换相联系

$$g(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi \mathrm{i} B}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2B}(Ax^2 - 2x'x + Dx'^2)\right] f(x) \mathrm{d}x \tag{9.84}$$

把旋转正交相推广为

$$X_{\mathrm{F}} \equiv (s^* a + ra^\dagger + sa^\dagger + r^* a)/\sqrt{2}, \ |s|^2 - |r|^2 = 1 \tag{9.85}$$

$(s, r)$与经典光学变换矩阵 $\boldsymbol{M}$ 通过式(9.72)相联系. 我们将证明,与$(D, B)$相关联的 Wigner 算符的 Radon 变换恰好是由属于正交测量量 $X_{\mathrm{F}}$ 的本征态所组成的纯态密度算符 $|x\rangle_{s,r\ s,r}\langle x|$,(即 $X_{\mathrm{F}} = FXF^\dagger$, $|x\rangle_{s,r} = F|x\rangle$)

$$\begin{aligned} F|x\rangle\langle x|F^\dagger &= |x\rangle_{s,r\ s,r}\langle x| \\ &= \iint \mathrm{d}x'\mathrm{d}p'\delta[x - (Dx' - Bp')]\Delta(x', p') \end{aligned} \tag{9.86}$$

其中

$$D = \frac{1}{2}(s + s^* + r + r^*), \ B = \frac{1}{2\mathrm{i}}(s^* - s + r^* - r) \tag{9.87}$$

$F(s, r)$是 Fresnel 算符,它在坐标表象中的矩阵元给出光学 Fresnel 变换的积分核,即式(9.84),我们称 $X_{\mathrm{F}}$ 为 Fresnel 变换的正则可观测量(canonical observable)或者 Fresnel 正交相,方程(9.86)说明,Fresnel 正交相的几率分布就是 Wigner 函数的 Radon 变换.

下面给出证明:

首先,由方程(9.77)可以算得

$$F(s,r)aF^{\dagger}(s,r)=s^{*}a+ra^{\dagger} \tag{9.88}$$

利用 $X=\frac{a+a^{\dagger}}{\sqrt{2}}$，$P=\frac{a-a^{\dagger}}{\mathrm{i}\sqrt{2}}$，则有

$$FXF^{\dagger}=F\frac{a+a^{\dagger}}{\sqrt{2}}F^{\dagger}=(s^{*}a+ra^{\dagger}+sa^{\dagger}+r^{*}a)/\sqrt{2}=X_{\mathrm{F}} \tag{9.89}$$

接着，可以给出$|x\rangle_{s,r}$的具体形式．由于 $s^{*}+r^{*}=D+\mathrm{i}B$，$s^{*}-r^{*}=A-\mathrm{i}C$，建立下面的本征方程

$$X_{\mathrm{F}}|x\rangle_{s,r}=(DX-BP)|x\rangle_{s,r}=x|x\rangle_{s,r} \tag{9.90}$$

所以

$$|x\rangle_{s,r}=F|x\rangle \tag{9.91}$$

在坐标和动量表象分别有

$$\langle x'|X_{\mathrm{F}}|x\rangle_{s,r}=\left(Dx'+\mathrm{i}B\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x'}\right)\langle x'|x\rangle_{s,r}=x\langle x'|x\rangle_{s,r} \tag{9.92}$$

$$\langle p|X_{\mathrm{F}}|x\rangle_{s,r}=\left(\mathrm{i}D\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}-Bp\right)\langle p|x\rangle_{s,r}=x\langle p|x\rangle_{s,r} \tag{9.93}$$

式(9.92)和式(9.93)的归一化解是

$$\langle x'|x\rangle_{s,r}=c(x)\exp\left[\frac{\mathrm{i}x'(Dx'-2x)}{2B}\right] \tag{9.94}$$

$$\langle p|x\rangle_{s,r}=d(x)\exp\left[\frac{\mathrm{i}p(-Bp-2x)}{2D}\right] \tag{9.95}$$

再利用$|x\rangle$和$|p\rangle$的 Fock 表象形式以及坐标表象和动量表象的完备性可以得到

$$
\begin{aligned}
|x\rangle_{s,r} &= \int \mathrm{d}x' \, |x'\rangle\langle x'|x\rangle_{s,r} \\
&= \pi^{-1/4} c(x) \sqrt{\frac{2B\pi}{B-\mathrm{i}D}} \exp\left[-\frac{x^2}{2B(B-\mathrm{i}D)} + \frac{\sqrt{2}xa^{\dagger}}{D+\mathrm{i}B} - \right. \\
&\left. \frac{a^{\dagger 2}(D-\mathrm{i}B)}{2(D+\mathrm{i}B)}\right] |0\rangle
\end{aligned} \tag{9.96}
$$

和

$$
\begin{aligned}
|x\rangle_{s,r} &= \int \mathrm{d}p \, |p\rangle\langle p|x\rangle_{s,r} \\
&= \pi^{-1/4} d(x) \sqrt{\frac{2D\pi}{D+\mathrm{i}B}} \exp\left[-\frac{x^2}{2D(D+\mathrm{i}B)} + \frac{\sqrt{2}xa^{\dagger}}{D+\mathrm{i}B} - \right. \\
&\left. \frac{a^{\dagger 2}(D-\mathrm{i}B)}{2(D+\mathrm{i}B)}\right] |0\rangle
\end{aligned} \tag{9.97}
$$

比较式(9.96)和式(9.97),发现

$$
\frac{c(x)}{d(x)} = \sqrt{\frac{D}{\mathrm{i}B}} \exp\left[\frac{\mathrm{i}A}{2B}x^2 - \frac{\mathrm{i}C}{2D}x^2\right] \tag{9.98}
$$

另一方面,由$|x\rangle_{s,r}$的正交性${}_{s,r}\langle x'|x''\rangle_{s,r} = \delta(x'-x'')$得

$$
|c(x)|^2 = \frac{1}{2\pi B}, \quad |d(x)|^2 = \frac{1}{2\pi D} \tag{9.99}
$$

比较式(9.98)和式(9.99)得

$$
c(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \mathrm{i}B}} \exp\left[\frac{\mathrm{i}A}{2B}x^2\right], \quad d(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \exp\left[\frac{\mathrm{i}C}{2D}x^2\right] \tag{9.100}
$$

$$
|x\rangle_{D,B} = \frac{\pi^{-1/4}}{\sqrt{D+\mathrm{i}B}} \exp\left[-\frac{A-\mathrm{i}C}{D+\mathrm{i}B}\frac{x^2}{2} + \frac{\sqrt{2}xa^{\dagger}}{D+\mathrm{i}B} - \frac{D-\mathrm{i}B}{D+\mathrm{i}B}\frac{a^{\dagger 2}}{2}\right] |0\rangle \tag{9.101}
$$

或者

$$|x\rangle_{s,r}=\frac{\pi^{-1/4}}{\sqrt{s^*+r^*}}\exp\left[-\frac{s^*-r^*}{s^*+r^*}\frac{x^2}{2}+\frac{\sqrt{2}xa^\dagger}{s^*+r^*}-\right.$$

$$\left.\frac{s+r}{s^*+r^*}\frac{a^{\dagger 2}}{2}\right]|0\rangle \tag{9.102}$$

很容易看到$|x\rangle_{s,r}$是完备的

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,|x\rangle_{s,r\ s,r}\langle x|=1 \tag{9.103}$$

根据 Weyl 对应规则,求投影算符$|x\rangle_{s,r\ s,r}\langle x|$的经典 Weyl 对应

$$\begin{aligned}&2\pi\mathrm{Tr}[\Delta(x',p')\,|x\rangle_{s,r\ s,r}\langle x|]\\&={}_{s,r}\langle x|\int\mathrm{d}u\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'u}\left|x'+\frac{u}{2}\right\rangle\left\langle x'-\frac{u}{2}\right|x\rangle_{s,r}\\&=\frac{1}{2\pi B}\int\mathrm{d}u\exp\left[\mathrm{i}p'u+\frac{\mathrm{i}}{B}u(x-Dx')\right]\\&=\delta[x-(Dx'-Bp')]\end{aligned} \tag{9.104}$$

即

$$|x\rangle_{s,r\ s,r}\langle x|=\iint\mathrm{d}x'\mathrm{d}p'\delta[x-(Dx'-Bp')]\Delta(x',p') \tag{9.105}$$

综上,证明了我们的结论,在 Fresnel 正交相的几率分布是 Wigner 函数的 Radon 变换

$$\begin{aligned}&|\langle x|F^\dagger|\psi\rangle|^2\\&=|{}_{s,r}\langle x|\psi\rangle|^2\\&=\iint\mathrm{d}x'\mathrm{d}p'\delta[x-(Dx'-Bp')]\langle\psi|\Delta(x',p')|\psi\rangle\end{aligned} \tag{9.106}$$

此外,量子态的 tomogram 恰好是此态在${}_{s,r}\langle x|$表象中的波函数的

模平方，这种量子断层摄影技术与光学菲涅耳变换之间的关系可能给实验者提供产生新的断层摄影技术的新思路.

同样的方法，与$(A, C)$相关联的 Wigner 算符的 Radon 变换恰好是纯态密度算符$|p\rangle_{s,r}\ {}_{s,r}\langle p|$

$$
\begin{aligned}
F \mid p\rangle\langle p \mid F^{\dagger} &= \mid p\rangle_{s,r}\ {}_{s,r}\langle p \mid \\
&= \iint \mathrm{d}x'\mathrm{d}p'\delta[x-(Ax'-Cp')]\Delta(x', p')
\end{aligned}
\tag{9.107}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
F \mid p\rangle &= \mid p\rangle_{s,r} \\
&= \frac{\pi^{-1/4}}{\sqrt{A-\mathrm{i}C}}\exp\left[-\frac{D+\mathrm{i}B}{A-\mathrm{i}C}\frac{p^2}{2}+\frac{\sqrt{2}\mathrm{i}pa^{\dagger}}{A-\mathrm{i}C}+\frac{A+\mathrm{i}C}{A-\mathrm{i}C}\frac{a^{\dagger 2}}{2}\right]\mid 0\rangle
\end{aligned}
\tag{9.108}
$$

由于菲涅耳算符构成辛群表示，利用此性质读者可以自己证明如下关系式：

$$
\begin{aligned}
& F'(s', r')F(s, r) \mid x\rangle\langle x \mid F^{\dagger}(s, r)F^{\dagger\prime}(s', r') \\
&= \mid x\rangle_{s',r'}\ {}_{s',r'}\langle x \mid \\
&= \iint \mathrm{d}x'\mathrm{d}p'\delta[x-((B'C+DD')x'- \\
&\quad (AB'+BD')p')]\Delta(x', p')
\end{aligned}
\tag{9.109}
$$

最后，作为坐标-动量中介表象的应用[13]，求解哈密顿量

$$
H=\frac{P^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2X^2+k(XP+PX) \tag{9.110}
$$

的本征态的波函数，在量子光学中，单模压缩态可以由此哈密顿量产生. 由式(9.88)可得

$$
\begin{aligned}
X_F &= F^{\dagger}XF = AX+BP \\
P_F &= F^{\dagger}PF = CX+DP
\end{aligned}
\tag{9.111}
$$

那么利用式(9.111)就可以计算 $X$ 和 $P$ 作用到$|x\rangle_{s,r}$上的结果

$$
\begin{aligned}
X \mid x\rangle_{s,r} &= XF \mid x\rangle = FF^{\dagger}XF \mid x\rangle = F(AX+BP) \mid x\rangle \\
&= \left(Ax + \mathrm{i}B\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)F \mid x\rangle = \left(Ax + \mathrm{i}B\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) \mid x\rangle_{s,r} \\
P \mid x\rangle_{s,r} &= PF \mid x\rangle = FF^{\dagger}PF \mid x\rangle = F(CX+DP) \mid x\rangle \\
&= \left(Cx + \mathrm{i}D\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)F \mid x\rangle = \left(Cx + \mathrm{i}D\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) \mid x\rangle_{s,r}
\end{aligned}
\tag{9.112}
$$

即

$$
{}_{s,r}\langle x \mid X = {}_{s,r}\langle x \mid \left(Ax - \mathrm{i}B\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) \tag{9.113}
$$

$$
{}_{s,r}\langle x \mid P = {}_{s,r}\langle x \mid \left(Cx - \mathrm{i}D\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) \tag{9.114}
$$

所以立即可得

$$
\begin{aligned}
{}_{s,r}\langle x \mid X^2 &= {}_{s,r}\langle x \mid \left(A^2x^2 - \mathrm{i}ABx\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \mathrm{i}AB\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x - B^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right) \\
{}_{s,r}\langle x \mid P^2 &= {}_{s,r}\langle x \mid \left(C^2x^2 - \mathrm{i}CDx\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \mathrm{i}CD\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x - D^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)
\end{aligned}
\tag{9.115}
$$

和

$$
\begin{aligned}
{}_{s,r}\langle x \mid XP &= {}_{s,r}\langle x \mid \left(ACx^2 - \mathrm{i}ADx\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \mathrm{i}BC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x - BD\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right) \\
{}_{s,r}\langle x \mid PX &= {}_{s,r}\langle x \mid \left(ACx^2 - \mathrm{i}BCx\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \mathrm{i}AD\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x - BD\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)
\end{aligned}
\tag{9.116}
$$

假定$|E_n\rangle$是哈密顿量 $H$ 的本征值为 $E_n$ 的本征态，那么就有

$$
\begin{aligned}
{}_{s,r}\langle x \mid H \mid E_n\rangle &= {}_{s,r}\langle x \mid \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2X^2 + k(XP+PX) \mid E_n\rangle \\
&= E_n \; {}_{s,r}\langle x \mid E_n\rangle
\end{aligned}
\tag{9.117}
$$

将式(9.115)和式(9.116)代入式(9.117)给出

$$\Big[\frac{1}{2m}\Big(C^2x^2-\mathrm{i}CDx\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\mathrm{i}CD\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x-D^2\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Big)+$$

$$\frac{1}{2}m\omega^2\Big(A^2x^2-\mathrm{i}ABx\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\mathrm{i}AB\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x-B^2\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Big)+$$

$$k\Big(ACx^2-\mathrm{i}ADx\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\mathrm{i}BC\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x-BD\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Big)+$$

$$k\Big(ACx^2-\mathrm{i}BCx\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\mathrm{i}AD\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x-BD\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Big)\Big]_{s,r}\langle x\mid E_n\rangle$$

$$=E_n\ {}_{s,r}\langle x\mid E_n\rangle \tag{9.118}$$

令其中 $x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$的系数为 0,可得

$$-\frac{1}{2m}CD-\frac{1}{2}m\omega^2AB-kAD-kBC=0 \tag{9.119}$$

那么方程(9.118)就变为

$$\Big[\frac{1}{2m}\Big(C^2x^2-D^2\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Big)+\frac{1}{2}m\omega^2\Big(A^2x^2-B^2\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Big)+$$

$$2k\Big(ACx^2-BD\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Big)\Big]_{s,r}\langle x\mid E_n\rangle$$

$$=E_n\ {}_{s,r}\langle x\mid E_n\rangle \tag{9.120}$$

可以选定 $A=C=1$,然后再根据 $AD-BC=1$ 以及式(9.119),可计算出 $B$, $D$ 的值

$$B=\frac{-1-2mk}{1+m^2\omega^2+4mk},\ D=\frac{m^2\omega^2+2mk}{1+m^2\omega^2+4mk} \tag{9.121}$$

将式(9.121)以及 $A=C=1$ 代入到式(9.120),给出新的方程

$$\Big[-\frac{1}{2\Big(\dfrac{1+m^2\omega^2+4mk}{m\omega^2-4mk^2}\Big)}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}\Big(\frac{1+m^2\omega^2+4mk}{m\omega^2-4mk^2}\Big)\times$$

$$
\left.(\omega^2 - 4k^2)x^2\right]_{s,r}\langle x \mid E_n\rangle
$$

$$
= E_n \ {}_{s,r}\langle x \mid E_n\rangle \tag{9.122}
$$

令

$$
m' \equiv \frac{1 + m^2\omega^2 + 4mk}{m(\omega^2 - 4k^2)},\ \omega'^2 \equiv \omega^2 - 4k^2 \tag{9.123}
$$

则方程(9.122)可写为

$$
\left[-\frac{1}{2m'}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m'\omega'^2 x^2\right]_{s,r}\langle x \mid E_n\rangle = E_n \ {}_{s,r}\langle x \mid E_n\rangle \tag{9.124}
$$

这可以看做是质量与频率都变了的谐振子，那么 $H$ 的本征态的波函数就是(取 $\hbar = 1$)

$$
{}_{s,r}\langle x \mid E_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi/m'\omega'}}}\mathrm{e}^{-(m'\omega' x^2)/2} H_n(\sqrt{m'\omega'}x) \tag{9.125}
$$

这是一个压缩态波函数.

## 9.5 关于 Tomogram 的一个定理[14]

这一节将给出一种简洁地计算混合态的 tomogram 的方法. 此外我们还发现了一个定理，即密度算符 $\rho$ 的 tomogram 等于 $F^\dagger \rho F$ 的经典 Weyl 对应函数的边缘积分，这里的 $F$ 即是 9.3 节介绍的 Fresnel 算符.

首先给出这个新定理.

在式(9.105)两边同乘以密度算符 $\rho$ 然后作求迹运算，并且注意到 Wigner 函数的定义 $W(p, x) = \mathrm{Tr}[\rho\Delta(p, x)]$，可以得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\left[\iint_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x'\mathrm{d}p'\delta[x-(Dx'-Bp')]\Delta(x', p')\rho\right] \\
&= \mathrm{Tr}(|x\rangle_{s,r}\ {}_{s,r}\langle x|\rho) \\
&= {}_{s,r}\langle x|\rho|x\rangle_{s,r} = \langle x|F^{\dagger}\rho F|x\rangle \\
&= \iint_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x'\mathrm{d}p'\delta[x-(Dx'-Bp')]W(x, p)
\end{aligned} \tag{9.126}$$

式(9.126)的右边就是通常定义的量子态在$(B, D)$方向的tomogram,它可以通过计算下面的式子实现

$$\langle x|F^{\dagger}\rho F|x\rangle \equiv \Xi \tag{9.127}$$

同样的,量子态在$(A, C)$方向的tomogram就可以通过计算$\langle p|F^{\dagger}\rho F|p\rangle$得到.假设$h(x, p)$是算符$F^{\dagger}\rho F$的经典Weyl对应

$$F^{\dagger}\rho F = \iint_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\mathrm{d}p h(x, p)\Delta(x, p) \tag{9.128}$$

那么利用式(9.4)和式(9.127),有

$$\begin{aligned}
\Xi &= \langle x|F^{\dagger}\rho F|x\rangle \\
&= \langle x|\iint\mathrm{d}x'\mathrm{d}p h(x', p)\Delta(x', p)|x\rangle \\
&= \iint\mathrm{d}x'\mathrm{d}p h(x', p)\int\frac{\mathrm{d}\nu}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\nu}\left\langle x\left|x'+\frac{\nu}{2}\right\rangle\left\langle x'-\frac{\nu}{2}\right|x\right\rangle \\
&= \frac{1}{\pi}\iint\mathrm{d}x'\mathrm{d}p h(x', p)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}p(x'-x)}\delta(2x'-2x) \\
&= \int\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}h(x, p)
\end{aligned} \tag{9.129}$$

所以我们得到一个定理:密度算符$\rho$的tomogram等于$F^{\dagger}\rho F$的经典Weyl对应函数$h(x, p)$的边缘积分,表达式如下

$$\mathrm{Tr}[\rho|x\rangle_{s,r}\ {}_{s,r}\langle x|] = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}h(x, p) \tag{9.130}$$

或者

$$\mathrm{Tr}[\rho \mid p\rangle_{s,r\ s,r}\langle p \mid] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} h(x,\ p) \qquad (9.131)$$

这样我们就建立了密度算符的 Tomogram 与 $F^{\dagger}\rho F$ 的经典 Weyl 对应函数之间的关系.

作为这个定理的应用,考虑混沌场的密度算符

$$\rho_c = (1 - \mathrm{e}^{\lambda})\mathrm{e}^{\lambda a^{\dagger} a},\ \lambda = -\omega\hbar/kT \qquad (9.132)$$

$k$ 是玻尔兹曼常数,$\omega$ 是频率,$T$ 是混沌场的温度.先给出算符$(1-\mathrm{e}^{\lambda})\mathrm{e}^{\lambda a^{\dagger} a}$的 Weyl 编序形式

$$(1 - \mathrm{e}^{\lambda})\mathrm{e}^{\lambda a^{\dagger} a} = \frac{2(1 - \mathrm{e}^{\lambda})}{\mathrm{e}^{\lambda} + 1} \mathop{:}\limits^{:} \exp\left[\frac{2(\mathrm{e}^{\lambda} - 1)}{\mathrm{e}^{\lambda} + 1} a^{\dagger} a\right] \mathop{:}\limits^{:} \qquad (9.133)$$

再根据算符 Weyl 编序在相似变换下的序不变性以及产生、消灭算符在 Fresnel 算符下的变换

$$F^{\dagger} a^{\dagger} F = sa - ra^{\dagger},\ F^{\dagger} a F = s^{*} a^{\dagger} - r^{*} a \qquad (9.134)$$

可以将 $F^{\dagger}\rho_c F$ 转化为其 Weyl 编序形式

$$\begin{aligned} F^{\dagger}\rho_c F &= 2\beta F^{\dagger} \mathop{:}\limits^{:} \exp[-2\beta a^{\dagger} a] \mathop{:}\limits^{:} F \\ &= 2\beta \mathop{:}\limits^{:} \exp[-2\beta(s^{*} a^{\dagger} - r^{*} a)(sa - ra^{\dagger})] \mathop{:}\limits^{:} \end{aligned} \qquad (9.135)$$

其中定义了 $\beta \equiv \frac{1 - \mathrm{e}^{\lambda}}{\mathrm{e}^{\lambda} + 1}$. 由于 $a = \frac{X + \mathrm{i}P}{\sqrt{2}}$, $a^{\dagger} = \frac{X - \mathrm{i}P}{\sqrt{2}}$, 方程(9.135)等价于

$$\begin{aligned} F^{\dagger}\rho_c F = 2\beta \mathop{:}\limits^{:} \exp\Big\{-2\beta\Big[&(P^2 - X^2)\mathrm{Re}(r^{*} s) + 2\mathrm{Im}(r^{*} s)XP + \\ &(r^{*} r + s^{*} s)\frac{P^2 + X^2}{2}\Big]\Big\} \mathop{:}\limits^{:} \end{aligned} \qquad (9.136)$$

那么根据式(4.31),$F^{\dagger}\rho_c F$ 的经典 Weyl 对应函数 $h_c(x,\ p)$即为

$$2\beta \vdots \exp\left\{-2\beta\left[(p^2-x^2)\mathrm{Re}(r^* s)+2xp\,\mathrm{Im}(r^* s)+\right.\right.$$

$$\left.\left.(r^* r+s^* s)\frac{x^2+p^2}{2}\right]\right\}\vdots \equiv h_c(x, p) \tag{9.137}$$

将式(9.137)代人到定理(9.130)，即得到混沌场的 Tomogram

$$\begin{aligned}\Xi_c &\equiv \mathrm{Tr}[\rho_c \mid x\rangle_{s,r\ s,r}\langle x\mid] = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}h_c(x, p)\\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi\tau}}\exp\left\{\beta\frac{4(\mathrm{Im}(r^* s))^2+2\tau\mathrm{Re}(r^* s)-\tau(r^* r+s^* s)}{\tau}x^2\right\}\end{aligned} \tag{9.138}$$

其中 $2\mathrm{Re}(r^* s)+(r^* r+s^* s)\equiv\tau$，再由式(9.72)和 $AD-BC=1$，式(9.138)又可以被写为如下更简洁的形式

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[\rho_c \mid x\rangle_{s,r\ s,r}\langle x\mid] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}h_c(x, p)\\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi(D^2+B^2)}}\exp\left\{-\frac{\beta x^2}{D^2+B^2}\right\}\end{aligned} \tag{9.139}$$

这就是 $\rho_c$ 在$(B, D)$方向上的 Tomogram，它是归一化的

$$\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi(D^2+B^2)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\exp\left\{-\frac{\beta x^2}{D^2+B^2}\right\}=1 \tag{9.140}$$

同样地，$\rho_c$ 在$(A, C)$方向上有

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[\rho_c \mid p\rangle_{s,r\ s,r}\langle p\mid] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}h_c(x, p)\\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi(A^2+C^2)}}\exp\left\{-\frac{\beta p^2}{A^2+C^2}\right\}\end{aligned} \tag{9.141}$$

和

$$\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi(A^2+C^2)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p\exp\left\{-\frac{\beta p^2}{A^2+C^2}\right\}=1 \qquad (9.142)$$

取 $\beta=1$，$(A, B, C, D)=\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 4\right)$，对于 $\rho_c$ 在 $(B, D)$ 方向(曲线 $f1$)和 $(A, C)$ 方向(曲线 $f2$)上的 Tomogram，绘制图形如下，从图 9-1 可以看出，这两个方向上 Tomogram 的区别以及它们均满足正态分布的共同点.

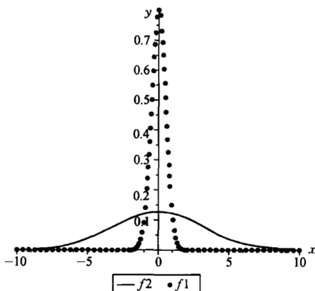



图 9-1　光学混沌场的 Tomogram

作为另一个例子，来看光学压缩混沌场的密度算符

$$\rho_s = S(\gamma)\rho_c S^{\dagger}(\gamma) \qquad (9.143)$$

$S(\gamma)=\exp[\mathrm{i}\gamma(QP+PQ)/2]$ 是单模压缩算符，$\gamma$ 是压缩参数. 由

$$SPS^{-1}=\mathrm{e}^{\gamma}P,\ SXS^{-1}=\mathrm{e}^{-\gamma}X \qquad (9.144)$$

可得

$$\rho_\gamma=(1-\mathrm{e}^{\lambda})S(\gamma)\mathrm{e}^{\lambda a^{\dagger}a}S^{-1}(\gamma)$$

$$= \frac{2(1-e^{\lambda})}{e^{\lambda}+1} \vdots \exp\left[\frac{e^{\lambda}-1}{e^{\lambda}+1}(e^{2\gamma}P^2 + e^{-2\gamma}X^2)\right] \vdots \tag{9.145}$$

用与上面同样的方法可以得到

$$\begin{aligned} F^{\dagger}\rho_s F &= \vdots h_s(x, p) \vdots \\ &= 2\beta \exp\{-2\beta[e^{2\gamma}(DP+CX)^2 + e^{-2\gamma}(BP+AX)^2]\} \end{aligned} \tag{9.146}$$

及 $F^{\dagger}\rho_s F$ 的经典 Weyl 对应函数 $h_s(x, p)$

$$h_s(x, p) = 2\beta \exp\{-2\beta[e^{2\gamma}(Dp+Cx)^2 + e^{-2\gamma}(Bp+Ax)^2]\} \tag{9.147}$$

所以 $\rho_s$ 在$(B, D)$方向上的 Tomogram 为

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[\rho_s \mid x\rangle_{s,r\ s,r}\langle x \mid] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} h_s(x, p) \\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi(e^{-2\gamma}B^2 + e^{2\gamma}D^2)}} \exp\left\{-\frac{\beta x^2}{e^{-2\gamma}B^2 + e^{2\gamma}D^2}\right\} \end{aligned} \tag{9.148}$$

同样可导出 $\rho_s$ 在$(A, C)$方向上的 Tomogram

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}[\rho_s \mid p\rangle_{s,r\ s,r}\langle p \mid] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2\pi} h_s(x, p) \\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi(e^{-2\gamma}A^2 + e^{2\gamma}C^2)}} \exp\left\{-\frac{\beta p^2}{e^{-2\gamma}A^2 + e^{2\gamma}C^2}\right\} \end{aligned} \tag{9.149}$$

取 $e^{2\gamma}=2$，$\beta=1$，$(A, B, C, D)=\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 4\right)$，在图 9-2 中绘制了 $\rho_s$ 在$(B, D)$方向（曲线 $f3$）和$(A, C)$方向（曲线 $f4$）上的 Tomogram，从与图 9-1 对比可以看出其压缩的行为.

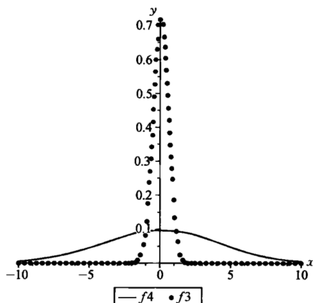



图 9-2 光学压缩混沌场的 Tomogram

## 9.6 中介纠缠态表象的构建

本节将引入中介纠缠态表象，用它导出双模 Fresnel 算符，这说明从量子力学的新表象出发可以找到新的量子幺正变换，由此也许能过渡到新的物理上有用的经典变换. 由此，我们可以体会 Einstein 的教导：创造的原理都存在于数学之中.

利用有序算符内的积分方法可以方便地发现若干有物理应用的中介纠缠态表象. 考虑如下的变换

$$a_1 \rightarrow s^* a_1 - r a_2^\dagger,\ a_2 \rightarrow s^* a_2 - r a_1^\dagger, \tag{9.150}$$

这里复数 $s$ 和 $r$ 满足关系 $|s|^2 - |r|^2 = 1$，将式(9.150)代入到式(7.1)，并将 $z \rightarrow \eta$ 以示区别，得另一类纯高斯型积分

$$1 = \int \frac{d^2\eta}{\pi} \vdots \exp\{-[\eta^* - (s a_1^\dagger - r^* a_2) + (s^* a_2 - r a_1^\dagger)] \times$$

$$[\eta-(s^* a_1 - r a_2^\dagger)+(s a_2^\dagger - r^* a_1)]\Big\} :$$

$$=\int \frac{d^2\eta}{|s+r|^2\pi} : \exp\Big\{-\frac{1}{|s+r|^2}[\eta^* -(s+r)a_1^\dagger + (s^*+r^*)a_2][\eta-(s^*+r^*)a_1+(s+r)a_2^\dagger]\Big\} : \quad (9.151)$$

在第二步里出现的 $\frac{1}{|s+r|^2}$ 是积分变量变换的结果，这样可确保在整个指数部分展开后能有双模真空投影算符 $|00\rangle\langle 00| = : e^{-a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2} :$ 出现，观察到

$$\frac{1}{|s+r|^2}=\frac{s^*-r^*}{2(s^*+r^*)}+\frac{s-r}{2(s+r)}, \quad (9.152)$$

式(9.151)就可写成

$$\int \frac{d^2\eta}{\pi} |\eta\rangle_{s,r}\ {}_{s,r}\langle\eta| = 1, \quad (9.153)$$

这里

$$|\eta\rangle_{s,r}=\frac{1}{s^*+r^*}\exp\Big[-\frac{s^*-r^*}{2(s^*+r^*)}|\eta|^2+\frac{\eta}{s^*+r^*}a_1^\dagger - \frac{\eta^*}{s^*+r^*}a_2^\dagger+\frac{s+r}{s^*+r^*}a_1^\dagger a_2^\dagger\Big]|00\rangle. \quad (9.154)$$

它对应的本征方程为

$$[(s^*+r^*)a_1-(s+r)a_2^\dagger]|\eta\rangle_{s,r}=\eta|\eta\rangle_{s,r}, \quad (9.155)$$

$$[(s^*+r^*)a_2-(s+r)a_1^\dagger]|\eta\rangle_{s,r}=-\eta^*|\eta\rangle_{s,r}. \quad (9.156)$$

用式(9.72)，$|s|^2-|r|^2=1$ 就会变成 $AD-BC=1$，则式(9.154)满足的本征方程为

$$[A(P_1+P_2)-C(X_1+X_2)]|\eta\rangle_{s,r}=\sqrt{2}\eta_2|\eta\rangle_{s,r}, \quad (9.157)$$

$$[A(X_1-X_2)+C(P_1-P_2)]\,|\,\eta\rangle_{s,r}=\sqrt{2}\eta_1\,|\,\eta\rangle_{s,r},$$
(9.158)

它介于两粒子相对坐标和总动量的共同本征态及其共轭态之间，所以称$|\eta\rangle_{s,r}$为中介纠缠态表象. 那么$|\eta\rangle_{s,r}$也可重新写成

$$|\,\eta\rangle_{s,r}=\frac{1}{A-\mathrm{i}C}\exp\Big[-\frac{D+\mathrm{i}B}{2(A-\mathrm{i}C)}\,|\,\eta\,|^2+\frac{\eta}{A-\mathrm{i}C}a_1^\dagger-\frac{\eta^*}{A-\mathrm{i}C}a_2^\dagger+\frac{A+\mathrm{i}C}{A-\mathrm{i}C}a_1^\dagger a_2^\dagger\Big]\,|\,00\rangle. \tag{9.159}$$

从本征方程(9.155)和(9.156)可以证明$|\eta\rangle_{s,r}$满足正交性关系

$${}_{s,r}\langle\eta\,|\,\eta'\rangle_{s,r}=\pi\delta(\eta-\eta')\delta(\eta^*-\eta'^*)\equiv\pi\delta^{(2)}(\eta-\eta').$$
(9.160)

## 9.7 中介纠缠态表象和双模 Fresnel 算符

作为$|\eta\rangle_{s,r}$的应用，用 IWOP 技术进行如下积分

$$\begin{aligned}F_2(r,s)&\equiv\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\,|\,\eta\rangle_{s,r}\langle\eta\,|\\&=\frac{1}{s^*+r^*}\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}:\exp\Big\{-\frac{s^*}{s^*+r^*}\,|\,\eta\,|^2+\\&\quad\frac{\eta[a_1^\dagger-(s^*+r^*)a_2]}{s^*+r^*}+\frac{\eta^*[a_1(s^*+r^*)-a_2^\dagger]}{s^*+r^*}+\\&\quad\frac{s+r}{s^*+r^*}a_1^\dagger a_2^\dagger+a_2a_1-a_2^\dagger a_2-a_1^\dagger a_1\Big\}:\\&=\exp\Big(\frac{r}{s^*}a_1^\dagger a_2^\dagger\Big)\exp[(a_1a_1^\dagger+a_2a_2^\dagger+1)\ln(s^*)^{-1}]\times\\&\quad\exp\Big(-\frac{r^*}{s^*}a_1a_2\Big).\end{aligned} \tag{9.161}$$

可以看出 $F_2(r, s)$ 是广义双模压缩算符(也可称为 SU(1, 1)压缩算符),从正交关系式(7.15)得

$$F_2(r, s)|\eta\rangle = \int \frac{d^2\eta'}{\pi}|\eta'\rangle_{s,r}\langle\eta'|\eta\rangle = |\eta\rangle_{s,r}, \quad (9.162)$$

说明算符 $F_2(r, s)$ 将 $|\eta\rangle$ 变为 $|\eta\rangle_{s,r}$.

采用相似的方法,利用式(7.7)和代换式(9.150)还可构造与 $|\eta\rangle_{s,r}$ 共轭的一个中介纠缠态表象,即

$$|\xi\rangle_{s,r} = \frac{1}{s^*-r^*}\exp\left[-\frac{s^*+r^*}{2(s^*-r^*)}|\xi|^2 + \frac{\xi a_1^\dagger}{s^*-r^*} + \frac{\xi^* a_2^\dagger}{s^*-r^*} - \frac{s-r}{s^*-r^*}a_1^\dagger a_2^\dagger\right]|00\rangle. \quad (9.163)$$

且有 $|\xi\rangle_{s,r} = F_2(r, s)|\xi\rangle$.

读者可以进一步体会到 IWOP 技术在构建新表象和找出新的幺正算符方面的有效性.

## 9.8 Wigner 变换与 Radon 变换[15]

Radon 变换是量子 Tomography 理论的核心. 从数学上来说,二维的 Radon 变换是 Wigner 函数对相空间中某个选定方向上的线性积分,即

$$\iint dx'dp'\delta(x - Dx' + Bp')W(p', x') \equiv R(x) \quad (9.164)$$

其中 $D$, $B$ 是实数, $R(x)$ 是 Tomogram. 另一方面,人们经常通过信号函数的积分变换来设计光学装置,如信号函数 $f(x)$ 的积分变换

$$\int \frac{du}{2\pi}e^{ipu}f\left(x-\frac{u}{2}\right)f^*\left(x+\frac{u}{2}\right) \equiv W(p, x) \quad (9.165)$$

也被称为 Wigner 变换(形同 Wigner 函数,在第 4 章对于

Wigner 函数已经作出详细的阐述)．毫无疑问，Wigner 函数 $W(p, x)$是随着信号函数 $f(x)$的变化而变化的．于是自然产生一个问题：如果信号函数 $f(x)$经历一系列的光学变换，如空间反演变换

$$f(x) \to f(-x) \tag{9.166}$$

或夫琅禾费衍射

$$f(x) \to \int e^{-ipx} f(x) dx \tag{9.167}$$

或薄透镜变换

$$f(x) \to f(x) e^{-i\kappa x^2} \tag{9.168}$$

或菲涅耳衍射(包括空间的自由传播)

$$f(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi i B'}} \int dx f(x) \exp\left[\frac{i}{2B'}(A'x^2 - 2x'x + D'x'^2)\right] \tag{9.169}$$

(其中 $A'D' - B'C' = 1$) 等等，那么相应的 tomogram 函数 $R(x)$ 将会出现什么变化呢？这是本节要讨论的内容．以下我们就利用 Wigner 算符的 Weyl 编序形式和 Weyl 编序算符在相似变换下的序不变性来研究信号改变所造成的 tomogram 函数的改变．研究表明，信号经过一系列的光学变换，其 tomogram 函数的改变可归结为 Radon 变换参数的改变．

Dirac 符号法理论告诉我们可以用左矢和右矢来表示波函数 $f(x) = \langle x \mid p \rangle$．在坐标表象$\langle x |$，Wigner 算符的形式是式(9.4)，相应的密度算符的 Wigner 函数为式(9.3)．另一方面，任何函数的变化 $f \to f'$可以被表示为

$$f(x) = \langle x \mid f \rangle \to \langle x \mid f' \rangle = \langle x \mid U \mid f \rangle \tag{9.170}$$

其中 $U$ 是一个算符．也就是说，$f \to f'$的变化可以看作是坐标的变

化 $\langle x| \to \langle x|U$，而 $|f\rangle$ 保持不变. 所以可以通过研究 Wigner 算符 $\Delta(p, x)$ 在量子力学 $U$ 变换下的改变，来研究 Wigner 函数从 $\mathrm{Tr}[|f\rangle\langle f|\Delta(p, x)]$ 到 $\mathrm{Tr}[|f'\rangle\langle f'|\Delta(p, x)]$ 的变化，即

$$\mathrm{Tr}[|f'\rangle\langle f'|\Delta(p, x)] = \mathrm{Tr}[|f\rangle\langle f|\Delta'(p, x)], \quad (9.171)$$

$$\Delta'(p, x) \equiv U^{\dagger}\int\frac{\mathrm{d}u}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pu}\left|x-\frac{u}{2}\right\rangle\left\langle x+\frac{u}{2}\right|U = U^{\dagger}\Delta(p, x)U \quad (9.172)$$

根据式(9.164)和式(9.3)就有

$$R(x) \to R'(x) \quad (9.173)$$

$$R'(x) = \mathrm{Tr}\left[\rho\iint\mathrm{d}x'\mathrm{d}p'\delta(x-Dx'+Bp')\Delta'(p', x')\right] \quad (9.174)$$

将 Wigner 算符的 Weyl 编序形式(4.28)代入式(9.164)，并利用 Weyl 编序算符内的积分技术可以得到

$$\iint\mathrm{d}x'\mathrm{d}p'\delta(x-Dx'+Bp')\Delta'(p', x') = U^{\dagger}\,\vdots\,\delta(x-DX+BP)\,\vdots\,U \quad (9.175)$$

再参考前面的结果式(9.86)，就可以把 Wigner 函数 $W' = \langle\psi|\Delta'(p, x)|\psi\rangle$ 的 Radon 变换表示为相空间 $\mathscr{D}'$-$\mathscr{B}'$ 方向的边缘分布

$$\iint\mathrm{d}x'\mathrm{d}p'\delta(x-Dx'+Bp')W'(p', x') = |_{\mathscr{D}', \mathscr{B}'}\langle x|\psi\rangle|^2 = R'(x) \quad (9.176)$$

$\mathscr{D}'$, $\mathscr{B}'$ 由 $U$ 的具体形式决定(见下)，$R'(x)$ 是新的 tomogram 函数.

下面根据算符的 Weyl 编序在相似变换下的序不变性来研究信号通过各种光学变换后，信号 Wigner 函数的 Radon 变换的相应改变，结果表明，这都可归结为 Radon 变换参数的变换.

首先，看在如下的幺正变换下

$$U^{\dagger}\begin{pmatrix}X\\P\end{pmatrix}U=\begin{pmatrix}A' & B'\\C' & D'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\P\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A'X+B'P\\C'X+D'P\end{pmatrix},\ A'D'-B'C'=1 \tag{9.177}$$

相应的 Wigner 函数是怎么变化的？根据算符的 Weyl 编序在相似变换下的序不变性有

$$\begin{aligned}\Delta(p,\ x) &\to U^{\dagger}\Delta(p,\ x)U\\&= \vdots\,\delta(x-A'X-B'P)\delta(p-C'X-D'P)\,\vdots\\&= \Delta(A'p-C'x,\ D'x-B'p)\end{aligned} \tag{9.178}$$

再参考式(9.86)得到 $U\Delta(p,\ x)U^{\dagger}$ 的 Radon 变换

$$\begin{aligned}&\iint dx'dp'\delta(x-Dx'+Bp')\Delta(A'p'-C'x',\ D'x'-B'p')\\&=\iint dx'dp'\delta(x-Dx'+Bp')\,\vdots\,\delta(x-A'X-B'P)\delta(p-C'X-D'P)\,\vdots\\&=\vdots\,\delta[x-D(A'X+B'P)+B(C'X+D'P)]\,\vdots\\&=\vdots\,\delta[x-(DA'-B'C')X+(BD'-DB')P]\,\vdots\\&=|\ x\rangle_{DA'-B'C',\ BD'-DB'}\ {}_{DA'-B'C',\ BD'-DB'}\langle x\ |\end{aligned} \tag{9.179}$$

所以信号经过幺正算符 $U$ 的作用后，相应的 Radon 函数的改变是通过 Radon 变换参数的改变来体现，即

$$(D,\ B)\to(DA'-BC',\ BD'-DB') \tag{9.180}$$

也就是

$$|\,{}_{D,\ B}\langle x\ |\ \psi\rangle\,|^{2}\to|\,{}_{DA'-BC',\ BD'-DB'}\langle x\ |\ \psi\rangle\,|^{2} \tag{9.181}$$

参见图 9－3.

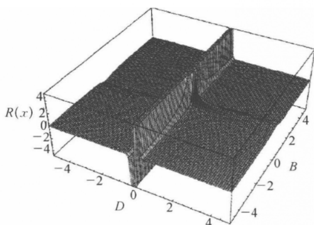



图 9-3　高斯信号的 Wigner 函数
在平面$(D, B)$上的两维 Radon 变换 $R(x)$ $(x=1)$

下面来看几个具体的例子：

**1）空间反演**

当信号函数 $f(x)$经历空间反演 $f(x)\rightarrow f(-x)$或者 $|x\rangle\rightarrow|-x\rangle$ 的变化后，相应地，Wigner 函数的变化为 $W(p, x)\rightarrow W(-p, -x)$，由于$(-)^N P(-)^N=-P$，$(-)^N X(-)^N=-X$，其中 $N=a^{\dagger}a$，参考式(9.177)可知

$$U^{\dagger}=(-)^N,\ \begin{pmatrix}A' & B' \\ C' & D'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{9.182}$$

再由式(9.179)就可以给出

$$\begin{aligned}&\iint \mathrm{d}x'\mathrm{d}p'\delta(x-Dx'+Bp')\Delta(-p', -x')\\ =&\ |x\rangle_{-D,-B}\ {}_{-D,-B}\langle x|\end{aligned} \tag{9.183}$$

所以 tomogram 函数的变化可以看作是 Radon 变换参数 $D$、$B$ 符号的改变，即 $|{}_{D,B}\langle x|\psi\rangle|^2\rightarrow|{}_{-D,-B}\langle x|\psi\rangle|^2$，见图 9-4.

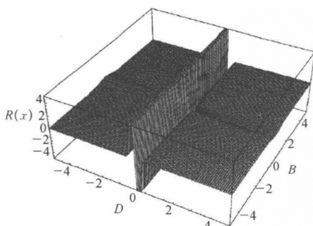



**图 9－4　空间反演变换引起的高斯信号的 Wigner 函数在平面$(D, B)$上的两维 Radon 变换 $R(x)$ $(x=1)$ 的相应改变**

**2）薄透镜变换**

另一个常用的信号 Wigner 变换是通过薄透镜之后的相变，也就是所谓的薄透镜变换，标记为 $f(x)\rightarrow f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx^2}$，其对应的幺正变换是 $|f\rangle\rightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{i}sX^2}|f\rangle$，即 $\langle x|\rightarrow\langle x|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sX^2}$，所以由 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}sX^2}P\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sX^2}=P-2sX$ 并参考式(9.177)可知

$$U^{\dagger}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}sX^2},\ \begin{pmatrix}A' & B'\\ C' & D'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2s & 1\end{pmatrix}\tag{9.184}$$

再由式(9.179)可得

$$\begin{aligned}&\iint \mathrm{d}x'\mathrm{d}p'\delta(x-Dx'+Bp')\Delta(p'+2x's,\ x')\\ &=\vdots\delta[x-(D+2sB)X+BP]\vdots\\ &=|x\rangle_{D+2sB,\ B}\langle x|\end{aligned}\tag{9.185}$$

所以，一旦给定参数 $s$，tomogram 函数的变化就可以看作是 Radon 变换参数的变化$(D, B)\rightarrow(D+2sB, B)$，$|_{D,B}\langle x|\psi\rangle|^2\rightarrow$

$\left|{}_{D+2tB,\,B}\langle x|\psi\rangle\right|^2$，见图 9－5.

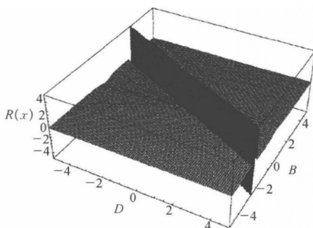



图 9－5　薄透镜变换引起的高斯信号的 Wigner 函数在平面($D$，$B$)上的两维 Radon 变换 $R(x)$ ($x=1$) 的相应改变

3）信号的自由传播

信号的另一个 Wigner 变换是空间的自由传播，表示为 $g(p)\rightarrow g(p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tp^2}$，对此相应的幺正变换是 $|f\rangle\rightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tP^2}|f\rangle$，也就是 $\langle x|\rightarrow\langle x|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tP^2}$ 所以利用 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}tP^2}X\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tP^2}=X-2tP$，可以得到

$$U^{\dagger}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}tP^2},\ \begin{pmatrix}A' & B'\\ C' & D'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\tag{9.186}$$

再一次利用式(9.179)给出，

$$\begin{aligned}&\iint \mathrm{d}x'\mathrm{d}p'\delta(x-Dx'+Bp')\Delta(p',\,x'+2tp')\\ &=\,\vdots\,\delta[x-DX+(B+2Dt)P]\,\vdots\\ &=|x\rangle_{D,\,B+2Dt\ \ D,\,B+2Dt}\langle x|\end{aligned}\tag{9.187}$$

所以经过空间的自由传播，信号 tomogram 函数的变化可以看作

是 Radon 变换参数做如下变化 $(D, B) \to (D, B+2Dt)$，$\left|{}_{D,B}\langle x|\psi\rangle\right|^2 \to \left|{}_{D,B+2Dt}\langle x|\psi\rangle\right|^2$，见图 9－6.

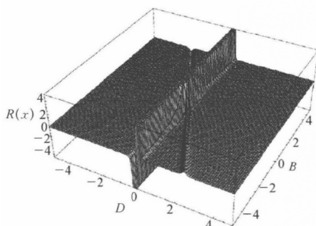



图 9－6　信号的自由传播引起的高斯信号的 Wigner 函数在平面 $(D, B)$ 上的两维 Radon 变换 $R(x)$ $(x=1)$ 的相应改变

**4）夫琅禾费衍射**

光学中的夫琅禾费衍射表示为

$$f(x) \to \int \mathrm{d}x f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \tag{9.188}$$

用量子力学的语言表达即为

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi N/2}|x\rangle = |p\rangle|_{p=x}, \ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi N/2}|p\rangle = |-x\rangle|_{x=p} \tag{9.189}$$

其中 $|p\rangle$ 是动量本征态. 信号通过式(9.188)的变换后，相应地 Wigner 算符和 Wigner 函数的变化是

$$\Delta(p, x) \to \Delta(x, -p), \ W(p, x) \to W(x, -p) \tag{9.190}$$

再由 $(N = a^\dagger a)$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi N/2} X \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi N/2} = P, \ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi N/2} P \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi N/2} = -X \tag{9.191}$$

得到

$$U^{\dagger}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi N/2},\ \begin{pmatrix}A' & B'\\ C' & D'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \tag{9.192}$$

再由式(9.179)可知

$$\begin{aligned}&\iint \mathrm{d}x'\mathrm{d}p'\delta(x-Dx'+Bp')\Delta(x',-p')\\ &=\vdots\delta[x-BX-DP]\vdots\\ &=|x\rangle_{B,-D\ B,-D}\langle x|\end{aligned} \tag{9.193}$$

通过夫琅禾费衍射变换后，tomogram 函数的变化可以看作是 Radon 变换参数做如下变化$(D,\ B)\to(B,\ -D)$，$|_{D,B}\langle x|\psi\rangle|^2\to|_{D,-B}\langle x|\psi\rangle|^2$，见图 9-7.

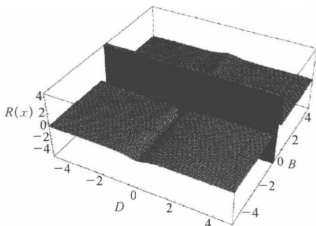



图 9-7　光学夫琅禾费衍射引起的高斯信号的 Wigner 函数在平面$(D,\ B)$上的两维 Radon 变换 $R(x)$ $(x=1)$ 的相应改变

**5) 菲涅耳衍射**

对应于菲涅耳变换的量子力学算符，在前面章节已经详细讨论过，根据式(9.89)，幺正算符 $F(r,\ s)$产生的变换是

$$F\begin{pmatrix}X\\P\end{pmatrix}F^{-1}=\begin{pmatrix}D''X-B''P\\A''P-C''X\end{pmatrix} \tag{9.194}$$

因此对比式(9.177),可知

$$U^{\dagger}=F,\ \begin{pmatrix}A' & B'\\C' & D'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D'' & -B''\\-C'' & A''\end{pmatrix} \tag{9.195}$$

从式(9.179)得到

$$\begin{aligned}&\iint \mathrm{d}x'\mathrm{d}p'\delta(x-Dx'+Bp')\Delta(C''x+D''p,\ A''x+B''p)\\&=\,\vdots\,\delta[x-(DD''-BC'')X+(BA''-DB'')P]\,\vdots\\&=|x\rangle_{DD''+BC'',\ BA''+DB''}\ {}_{DD''+BC'',\ BA''+DB''}\langle x|\end{aligned} \tag{9.196}$$

由此 tomogram 函数的变化可以看作是 Radon 变换参数做如下变化 $(D,\ B)\rightarrow(DD''+BC'',\ BA''+DB'')$, $|{}_{D,\,B}\langle x|\psi\rangle|^2\rightarrow|{}_{DD''+BC'',\ BA''+DB''}\langle x|\psi\rangle|^2$,见图 9-8.

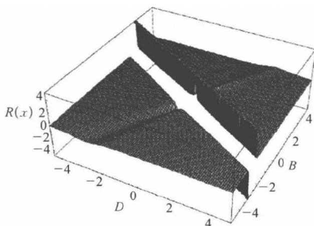



图 9-8　非涅耳衍射引起的高斯信号的 Wigner 函数在平面$(D,B)$上的两维 Radon 变换 $R(x)$ $(x=1)$ 的相应改变

上面各种光学变换引起的 Radon 变换参数的改变可以总结为表 9-1.

表 9-1 各种光学变换引起的 Radon 变换参数的改变

| 原始信号 | $D$ | $B$ |
|---|---|---|
| 空间反演 | $-D$ | $-B$ |
| 薄透镜变换 | $D+2sB$ | $B$ |
| 信号的自由传播 | $D$ | $B+2Dt$ |
| 夫琅禾费衍射 | $B$ | $-D$ |
| 菲涅耳衍射 | $DD''+BC''$ | $BA''+DB''$ |

通过本节具体的例子，我们发现，当信号经过光学处理，其 Wigner 函数的 Radon 变换函数的改变可以归结为 Radon 变换参数的改变. 因此，一旦知道 Radon 变换的参数变换，就可以直接知道 tomogram 函数是如何变化的，这给科学研究量子 Tomography 理论带来了便利.

## 9.9 光学 Fresnel 变换与量子 tomography 的关系——两模情况

本节将 9.4 节的内容推广到两模情况. 在两模 Fresnel 变换下，纠缠态投影算符 $|\eta\rangle\langle\eta|$ 变为 $F_2|\eta\rangle\langle\eta|F_2^{\dagger}=|\eta\rangle_{s,r\ s,r}\langle\eta|$，我们要证明这恰是两模 Wigner 算符的 Radon 变换，所以 Fresnel 正交相的几率分布就是 tomography. 这又为我们提供了一种研究量子 Tomography 理论的好方法.

在第 3 章讨论量子刘维尔定理时，已经给出在两模相干态表象中 Fresnel 算符的表示(那里是用 $U_2(r, s)$表示的)式(3.115)和(3.116)，由纠缠态表象式(7.4)及其完备性关系，可以求得下面的内积

$$
\begin{aligned}
&\langle z_1, z_2 \mid \eta\rangle \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2}(|z_1|^2+|z_2|^2+|\eta|^2)+\eta z_1^*-\eta^* z_2^*+z_1^* z_2^*\right]
\end{aligned} \tag{9.197}
$$

及

$$
\begin{aligned}
&\langle z_1', z_2' | F_2(s, r) | z_1, z_2\rangle \\
&= \frac{1}{s^*}\exp\Big[-\frac{1}{2}(|z_1|^2+|z_2|^2+|z_1'|^2+|z_2'|^2)+ \\
&\quad \frac{r}{s^*}z_1'^* z_2'^* - \frac{r^*}{s^*}z_1 z_2 + \frac{1}{s^*}(z_1'^* z_1 + z_2'^* z_2)\Big]
\end{aligned} \tag{9.198}
$$

因此可以得到双模 Fresnel 变换的积分核

$$
\begin{aligned}
&K_2^{(r,s)}(\eta', \eta) \\
&= \frac{1}{\pi}\langle \eta' | F_2(r, s) | \eta\rangle \\
&= \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2 d^2 z_1' d^2 z_2'}{\pi^5}\langle \eta' \mid z_1', z_2'\rangle\langle z_1', z_2' \mid F_2(r, s) \\
&\quad \mid z_1, z_2\rangle\langle z_1, z_2 \mid \eta\rangle \\
&= \frac{1}{(r^*+s^*-r-s)\pi}\exp\Bigg[\frac{(r^*-s)|\eta|^2-(r+s)|\eta'|^2+\eta\eta'^*+\eta^*\eta'}{r^*+s^*-r-s}- \\
&\quad \frac{|\eta'|^2+|\eta|^2}{2}\Bigg]
\end{aligned} \tag{9.199}
$$

再由式(9.72)可得

$$
\begin{aligned}
K_2^{(r,s)}(\eta', \eta) &= \frac{1}{2iB\pi}\exp\left[\frac{i}{2B}(A|\eta|^2-(\eta\eta'^*+\eta^*\eta')+D|\eta'|^2)\right] \\
&\equiv K_2^M(\eta', \eta)
\end{aligned} \tag{9.200}
$$

上角标 $M$ 说明 $K_2^M$ 的参数是$[A, B; C, D]$. 将 $F_2(s, r)$作用在$|\eta\rangle$并利用式(3.116)和式(9.197)及积分公式(4.114)得到

$$
\begin{aligned}
& F_2(r, s) \mid \eta\rangle \\
= & \frac{1}{s^*}\int \frac{\mathrm{d}^2 z_1 \mathrm{d}^2 z_2}{\pi^2}\exp\left[\frac{r}{s^*}a_1^\dagger a_2^\dagger + \left(\frac{1}{s^*}-1\right)(a_1^\dagger z_1 + z_2 a_2^\dagger) - \right. \\
& \left. \frac{r^*}{s^*}z_1 z_2\right] \mid z_1, z_2\rangle\langle z_1, z_2 \mid \eta\rangle \\
= & \frac{1}{r^*+s^*}\exp\left\{-\frac{s^*-r^*}{2(s^*+r^*)} \mid \eta\mid^2 + \frac{\eta a_1^\dagger}{r^*+s^*} - \frac{\eta^* a_2^\dagger}{r^*+s^*} + \right. \\
& \left. \frac{s+r}{r^*+s^*}a_1^\dagger a_2^\dagger\right\} \mid 00\rangle \\
\equiv & \mid \eta\rangle_{s,r}
\end{aligned}
\tag{9.201}
$$

或

$$
\begin{aligned}
\mid \eta\rangle_{s,r} = & \frac{1}{D+\mathrm{i}B}\exp\left\{-\frac{A-\mathrm{i}C}{2(D+\mathrm{i}B)} \mid \eta\mid^2 + \frac{\eta a_1^\dagger}{D+\mathrm{i}B} - \frac{\eta^* a_2^\dagger}{D+\mathrm{i}B} + \right. \\
& \left. \frac{D-\mathrm{i}B}{D+\mathrm{i}B}a_1^\dagger a_2^\dagger\right\} \mid 00\rangle
\end{aligned}
\tag{9.202}
$$

注意到$|\eta\rangle_{s,r}$的完备正交性

$$
\int \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}|\eta\rangle_{s,r}\ {}_{s,r}\langle\eta| = 1, \quad {}_{s,r}\langle\eta \mid \eta'\rangle_{s,r} = \pi\delta^2(\eta-\eta')
\tag{9.203}
$$

即$|\eta\rangle_{s,r}$构成一个新的量子力学表象,由

$$
\begin{aligned}
a_1 \mid \eta\rangle_{s,r} &= \left(\frac{\eta}{D+\mathrm{i}B} + \frac{D-\mathrm{i}B}{D+\mathrm{i}B}a_2^\dagger\right)| \eta\rangle_{s,r} \\
a_2 \mid \eta\rangle_{s,r} &= \left(-\frac{\eta^*}{D+\mathrm{i}B} + \frac{D-\mathrm{i}B}{D+\mathrm{i}B}a_1^\dagger\right)| \eta\rangle_{s,r}
\end{aligned}
\tag{9.204}
$$

可得$|\eta\rangle_{s,r}$所满足的本征方程

$$
\begin{aligned}
[D(Q_1-Q_2) - B(P_1-P_2)] \mid \eta\rangle_{s,r} &= \sqrt{2}\,\eta_1 \mid \eta\rangle_{s,r} \\
[B(Q_1+Q_2) + D(P_1+P_2)] \mid \eta\rangle_{s,r} &= \sqrt{2}\,\eta_2 \mid \eta\rangle_{s,r}
\end{aligned}
\tag{9.205}
$$

亦可用另外一种方法来验证式(9.205)，留给读者思考. 利用纠缠形式的 Weyl 对应规则

$$h(\sigma,\gamma)=4\pi^2\mathrm{Tr}[H(a_1^\dagger,a_2^\dagger;a_1,a_2)\Delta(\sigma,\gamma)] \quad (9.206)$$

其中 $\Delta$ 是纠缠态表象中的 Wigner 算符，计算投影算符 $|\eta\rangle_{s,r}\,{}_{s,r}\langle\eta|$ 的经典对应

$$\begin{aligned}&4\pi^2\mathrm{Tr}[|\eta\rangle_{s,r}\,{}_{s,r}\langle\eta|\Delta(\sigma,\gamma)]\\&=4\pi^2\int\frac{d^2\eta'}{\pi^3}\,{}_{s,r}\langle\eta|\sigma-\eta'\rangle\langle\sigma+\eta'|\eta\rangle_{s,r}e^{\eta'\gamma^*-\gamma\eta'^*}\\&=4\pi^2\int\frac{d^2\eta'}{\pi^3}\langle\eta|F_2^\dagger|\sigma-\eta'\rangle\langle\sigma+\eta'|F_2|\eta\rangle e^{\eta'\gamma^*-\gamma\eta'^*}\end{aligned} \quad (9.207)$$

由方程(9.201)则得到

$$\begin{aligned}&4\pi^2\mathrm{Tr}[|\eta\rangle_{s,r}\,{}_{s,r}\langle\eta|\Delta(\sigma,\gamma)]\\&=\pi\delta(\eta_2-D\sigma_2+B\gamma_1)\delta(\eta_1-D\sigma_1-B\gamma_2)\end{aligned} \quad (9.208)$$

即

$$\begin{aligned}&|\eta\rangle_{s,r}\,{}_{s,r}\langle\eta|\\&=\pi\int d^2\gamma d^2\sigma\,\delta(\eta_2-D\sigma_2+B\gamma_1)\delta(\eta_1-D\sigma_1-B\gamma_2)\Delta(\sigma,\gamma)\end{aligned} \quad (9.209)$$

所以投影算符 $|\eta\rangle_{s,r}\,{}_{s,r}\langle\eta|$ 恰是 $\Delta(\sigma,\gamma)$ 的 Radon 变换，接着有

$$\begin{aligned}&|{}_{s,r}\langle\eta|\psi\rangle|^2\\&=|\langle\eta|F^\dagger|\psi\rangle|^2\\&=\pi\int d^2\gamma d^2\sigma\,\delta(\eta_2-D\sigma_2+B\gamma_1)\delta(\eta_1-D\sigma_1-B\gamma_2)\langle\psi|\Delta(\sigma,\gamma)|\psi\rangle\end{aligned} \quad (9.210)$$

其中 $\langle\psi|\Delta(\sigma,\gamma)|\psi\rangle$ 是纠缠 Wigner 函数.

从上面的讨论可以得出，Fresnel 正交相的几率分布就是纠缠

Wigner 函数的 Radon 变换,我们期望这个关系能够被应用到实验中.

## 9.10 密度算符的特征函数与其 tomogram 的关系[16]

狄拉克曾说:"对于解决量子力学中的问题,使抽象量变得很简单的表象理论可以节省我们很多的脑力."本节就利用坐标动量中介表象和有序算符内的积分技术,把量子 tomography 理论算符化,给出密度算符的特征函数与其 tomogram 的关系,同时给出密度算符在坐标动量中介表象中的展开式.

在 9.1.1 节讲过,$|x\rangle_{\mu,\nu}\,{}_{\mu,\nu}\langle x|$ 是 Wigner 算符的 Rodon 变换,所以引入 $|x\rangle_{\mu,\nu}$ 是很必要的,由于 $|x\rangle_{\mu,\nu}$ 满足本征方程 $(\nu P+\mu X)|x\rangle_{\mu,\nu}=x|x\rangle_{\mu,\nu}$,所以称其为坐标动量中介表象. 在方程(9.27)的两边同乘以密度算符并作求迹运算,其左边给出

$$\widetilde{L}(x,\mu,\nu)=\iint \mathrm{d}p'\mathrm{d}x'\delta(x-\nu p'-\mu x')W(x',p'), \tag{9.211}$$

$W$ 是 $\rho$ 的 Wigner 函数,其右边为

$$\widetilde{L}(x,\mu,\nu)\equiv \mathrm{Tr}\left[\rho|x\rangle_{\mu,\nu}\,{}_{\mu,\nu}\langle x|\right]={}_{\mu,\nu}\langle x\mid\rho\mid x\rangle_{\mu,\nu} \tag{9.212}$$

$|x\rangle_{\mu,\nu}\,{}_{\mu,\nu}\langle x|$ 可称为 tomogram 算符. 由内积(见式(9.36))

$$\langle x'\mid x\rangle_{\mu,\nu}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}xx'}{\nu}-\frac{\mathrm{i}\mu}{2\nu}x'^2\right) \tag{9.213}$$

得

$$|x\rangle_{\mu,\nu}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}\int\mathrm{d}x\exp\left(\frac{\mathrm{i}xx'}{\nu}-\frac{\mathrm{i}\mu}{2\nu}x'^2\right)|x'\rangle \tag{9.214}$$

所以式(9.212)可改写为

$$\widetilde{L}(x,\mu,\nu)=\langle x\mid F^{\dagger}\rho F\mid x\rangle=\frac{1}{2\pi\nu}\iint dx''dx'\langle x'\mid\rho\mid x''\rangle\times$$
$$\exp\left[\frac{ix}{\nu}(x'-x'')-\frac{i\mu}{2\nu}(x''^2-x'^2)\right]\tag{9.215}$$

$F$ 是式(9.78)中的 Fresnel 变换. 当 $\rho=|\psi\rangle\langle\psi|$时,

$$\widetilde{L}(x,\mu,\nu)=|{}_{\mu,\nu}\langle x\mid\psi\rangle|^2\tag{9.216}$$

利用 $x'=\dfrac{\alpha+\alpha^*}{\sqrt{2}}$, $p'=\dfrac{\alpha-\alpha^*}{i\sqrt{2}}$, $\Delta(p',x')$可以转化为 $\Delta(\alpha)$,由 Wigner 算符的正规乘积形式得到

$$2\int d^2\alpha e^{z\alpha^*-\alpha z^*}\Delta(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int d^2\alpha e^{z\alpha^*-\alpha z^*}:e^{-2(a^\dagger-\alpha^*)(a-\alpha)}:$$
$$=e^{za^\dagger}e^{-z^*a-|z|^2/2}\equiv D(z)\tag{9.217}$$

$D(z)$是平移算符. 其逆变换为

$$\int\frac{d^2z}{2\pi^2}e^{\alpha z^*-z\alpha^*}D(z)=\Delta(\alpha,\alpha^*)\tag{9.218}$$

利用式(9.25)和式(9.217),我们计算

$$\begin{aligned}&\int dxe^{ix}|x\rangle_{\mu,\nu\ \mu,\nu}\langle x|=e^{i(X\mu+P\nu)}\\&=\iint dx'dp'\Delta(p',x')e^{i(\mu x'+\nu p')}\\&=2\int d^2\alpha e^{\eta\alpha^*-\alpha\eta^*}\Delta(\alpha,\alpha^*)=D(\eta)\end{aligned}\tag{9.219}$$

其中用到了

$$i(\mu x'+\nu p')=\eta\alpha^*-\alpha\eta^*\tag{9.220}$$

$$\eta=\frac{-\nu+i\mu}{\sqrt{2}},\quad\eta^*=\frac{-\nu-i\mu}{\sqrt{2}},\quad\mu=\frac{\eta-\eta^*}{i\sqrt{2}},\quad\nu=-\frac{\eta+\eta^*}{\sqrt{2}}\tag{9.221}$$

在方程(9.219)的两边同乘以密度算符并作求迹运算，得到

$$\mathrm{Tr}\left[\rho\int \mathrm{d}x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,|x\rangle_{\mu,\nu}\ {}_{\mu,\nu}\langle x|\right]=\mathrm{Tr}\left[\rho D(\eta)\right]\equiv \chi(\eta)\,\Big|_{\eta=\frac{-\nu+\mathrm{i}\mu}{\sqrt{2}}} \tag{9.222}$$

其中$\chi(\eta)$是密度算符的特征函数，在求解量子光学主方程时经常被用到.或者利用式(9.212)可以得到

$$\int \mathrm{d}x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\widetilde{L}(x,\mu,\nu)=\chi(\eta)\,\Big|_{\eta=\frac{-\nu+\mathrm{i}\mu}{\sqrt{2}}} \tag{9.223}$$

这就是密度算符的特征函数与其 tomogram 的关系，其中$(\mu,\nu)$是 tomography 参数.

由于$\rho$的 Weyl 经典对应是$2\pi\mathrm{Tr}\left[\rho\Delta(\alpha,\alpha^*)\right]$，所以 Weyl 量子化规则可以写为

$$\rho=4\pi\int \mathrm{d}^2\alpha\Delta(\alpha,\alpha^*)\mathrm{Tr}\left[\rho\Delta(\alpha,\alpha^*)\right] \tag{9.224}$$

将式(9.218)代入式(9.224)并利用式(9.217)以及(9.219)得到

$$\begin{aligned}\rho&=2\int \mathrm{d}^2\alpha\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\mathrm{e}^{\alpha\eta^*-\eta\alpha^*}D(\eta)\mathrm{Tr}\left[\rho\Delta(\alpha,\alpha^*)\right]\\&=\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}D(\eta)\mathrm{Tr}\left[2\rho\int \mathrm{d}^2\alpha\mathrm{e}^{\alpha\eta^*-\eta\alpha^*}\Delta(\alpha,\alpha^*)\right]\\&=\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}D(\eta)\mathrm{Tr}\left[\rho D(-\eta)\right]\\&=\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}D(-\eta)\,\chi(\eta)\end{aligned} \tag{9.225}$$

由式(9.225)和式(9.223)得

$$\begin{aligned}\rho&=\frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}^2\eta\mathrm{e}^{\eta^*a-a^\dagger\eta}\chi(\eta)=\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\nu\mathrm{d}\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mu X+\nu P)}\chi(\eta)\,\Big|_{\eta=\frac{-\nu+\mathrm{i}\mu}{\sqrt{2}}}\\&=\frac{1}{2\pi}\iiint \mathrm{d}\nu\mathrm{d}\mu\mathrm{d}x\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-\mu X-\nu P)}\,\widetilde{L}(x,\mu,\nu)\end{aligned} \tag{9.226}$$

这就是 $\widetilde{L}(x, \mu, \nu) \equiv \mathrm{Tr}[\rho|x, \mu, \nu\rangle\langle x, \mu, \nu|]$ 的逆变换. 利用(9.211)以及 Wigner 算符的 Weyl 编序形式(4.28),可以验证式(9.226),即

$$\begin{aligned}
\rho &= 2\pi\iint \mathrm{d}x'\mathrm{d}p' W(p', x')\Delta(p', x') \\
&= 2\pi\iint \mathrm{d}x'\mathrm{d}p' W(p', x') \vdots \delta(x'-X)\delta(p'-P) \vdots \\
&= \frac{1}{2\pi}\iint \mathrm{d}\nu\mathrm{d}\mu\mathrm{d}x'\mathrm{d}p' W(p', x') \vdots \exp[\mathrm{i}\mu(x'-X)+\mathrm{i}\nu(p'-P)] \vdots \\
&= \frac{1}{2\pi}\iint \mathrm{d}\nu\mathrm{d}\mu\mathrm{d}x \iint \mathrm{d}x'\mathrm{d}p' W(p', x')\delta(x-\mu x'-\nu p')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-\mu X-\nu P)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\iint \mathrm{d}\nu\mathrm{d}\mu\mathrm{d}x\, \widetilde{L}(x, \mu, \nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-\mu X-\nu P)}
\end{aligned} \tag{9.227}$$

用坐标动量中介表象的性质和式(9.223),也可以把式(9.226)中的第二步改写为

$$\rho = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\nu\mathrm{d}\mu\mathrm{d}x\,|x\rangle_{\mu,\nu\ \mu,\nu}\langle x|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\chi(\eta)\Big|_{\eta=\frac{-\nu+\mathrm{i}\mu}{\sqrt{2}}} \tag{9.228}$$

总之,我们给出了密度算符的特征函数与其 tomogram 的关系,同时给出了密度算符在坐标动量中介表象中的展开式,这从另一侧面说明了量子 Tomography 理论.

## 9.11 Wigner 算符在超平面上的 Radon 变换[17]

利用 IWOP 技术,本节将 Wigner 算符的 Radon 变换推广到高维空间. $2n$ 维相空间中的 Wigner 算符为

$$\Delta(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{\pi^n} :\exp[-(\vec{x}-\vec{X})^2-(\vec{p}-\vec{P})^2]: \tag{9.229}$$

超平面通常由下面的方程表示出来

$$x-\vec{\lambda}\cdot\vec{x}'-\vec{\mu}\cdot\vec{p}'=0 \tag{9.230}$$

$2n$ 维相空间中 Wigner 算符的 Radon 变换为

$$\int \mathrm{d}^n \vec{x}' \mathrm{d}^n \vec{p}' \delta(x - \vec{\lambda} \cdot \vec{x}' - \vec{\mu} \cdot \vec{p}') \Delta(\vec{x}', \vec{p}') \equiv I \quad (9.231)$$

令 $\vec{\Lambda} = (\vec{\lambda}, \vec{\mu})$，$\vec{Q} = (\vec{X}, \vec{P})$，$\vec{q} = (\vec{x}', \vec{p}')$ 是 $2n$ 维坐标，那么根据 Wigner 算符的正规乘积形式(4.12)就可以把式(9.231)简洁地写为

$$I = \frac{1}{\pi^n} \int \mathrm{d}^{2n} \vec{q} \delta(x - \vec{\Lambda} \cdot \vec{q}) : \mathrm{e}^{-(\vec{q} - \vec{Q})^2} : \quad (9.232)$$

由于 $\vec{\Lambda}$ 是一个固定的态矢，我们可以对广义坐标系统旋转，$\vec{q} \to \vec{q}' = R\vec{q}$，$\mathrm{d}^{2n}\vec{q} \to \mathrm{d}^{2n}\vec{q}'$，以使 $q'_1$ 和态矢 $\vec{\Lambda}$ 的方向一致，那么

$$\vec{\Lambda} \cdot \vec{q} = |\vec{\Lambda}| q'_1 = \Lambda q'_1 = \sqrt{\vec{\lambda}^2 + \vec{\mu}^2} q'_1 \quad (9.233)$$

相应地，态矢 $(\vec{q} - \vec{Q})$ 也要同样地旋转，这就要求 $\vec{Q}' = R\vec{Q}$，

$$Q'_1 = \frac{1}{\Lambda} \Lambda Q'_1 = \frac{1}{\Lambda} \vec{\Lambda} \cdot \vec{Q} \quad (9.234)$$

接着就有

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\pi^n} \int \mathrm{d}^{2n} \vec{q}' \delta(x - \Lambda q'_1) : \exp[-(\vec{q}' - \vec{Q}')^2] : \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \mathrm{d}q'_1 \delta(x - \Lambda q'_1) : \exp[-(q'_1 - Q'_1)^2] : \\ &= \frac{1}{\Lambda\sqrt{\pi}} : \exp\left[-\left(\frac{x}{\Lambda} - Q'_1\right)^2\right] : = \frac{1}{\Lambda\sqrt{\pi}} : \exp\left[-\frac{1}{\Lambda^2}(x - \vec{\Lambda} \cdot \vec{Q})^2\right] : \\ &= \frac{1}{\sqrt{\vec{\lambda}^2 + \vec{\mu}^2}\sqrt{\pi}} : \exp\left[-\frac{1}{\vec{\lambda}^2 + \vec{\mu}^2}(x - \vec{\lambda} \cdot \vec{X} - \vec{\mu} \cdot \vec{P})^2\right] : \end{aligned} \quad (9.235)$$

这是正规乘积内的二项式分布形式，当 $n = 1$ 时，式(9.235)退化为纯态密度算符式(9.27)，对于 $n \neq 1$，由于

$$\frac{1}{\sqrt{\vec{\lambda}^2+\vec{\mu}^2}\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x:\exp\left[-\frac{1}{\vec{\lambda}^2+\vec{\mu}^2}(x-\vec{\lambda}\cdot\vec{X}-\vec{\mu}\cdot\vec{P})^2\right]:=1 \tag{9.236}$$

所以 $I$ 代表的是混合态.

由式(9.235),可以重建 Wigner 算符.做下面的积分

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{\vec{\lambda}^2+\vec{\mu}^2}\sqrt{\pi}}\int\mathrm{d}x:\exp\left[-\frac{1}{\vec{\lambda}^2+\vec{\mu}^2}(x-\vec{\lambda}\cdot\vec{X}-\vec{\mu}\cdot\vec{P})^2\right]:\mathrm{e}^{-\mathrm{i}gx}\\
&=\frac{1}{\sqrt{\vec{\lambda}^2+\vec{\mu}^2}\sqrt{\pi}}\int\mathrm{d}x:\exp\left[-\frac{1}{\vec{\lambda}^2+\vec{\mu}^2}\left(x-\vec{\lambda}\cdot\vec{X}-\vec{\mu}\cdot\vec{P}-\right.\right.\\
&\left.\left.\frac{\mathrm{i}g(\vec{\lambda}^2+\vec{\mu}^2)}{2})^2\right)-\mathrm{i}g(\vec{\lambda}\cdot\vec{X}+\vec{\mu}\cdot\vec{P})-\frac{g^2}{4}(\vec{\lambda}^2+\vec{\mu}^2)\right]:\\
&=:\exp\left[-\mathrm{i}g(\vec{\lambda}\cdot\vec{X}+\vec{\mu}\cdot\vec{P})-\frac{g^2}{4}(\vec{\lambda}^2+\vec{\mu}^2)\right]:
\end{aligned} \tag{9.237}$$

引入 $\vec{\beta}=\frac{\vec{\lambda}-\mathrm{i}\vec{\mu}}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\vec{\lambda}^2+\vec{\mu}^2}=\sqrt{2}\,|\vec{\beta}|$ 和 $\vec{\lambda}\cdot\vec{X}+\vec{\mu}\cdot\vec{P}=\vec{\beta}\cdot\vec{a}+\vec{\beta}^*\cdot\vec{a}^\dagger$,并利用 Baker-Hausdorff 公式可得

$$\begin{aligned}
\text{式(9.237)}&=:\exp\left[-\mathrm{i}g(\vec{\lambda}\cdot\vec{X}+\vec{\mu}\cdot\vec{P})-\frac{g^2}{2}|\vec{\beta}|^2\right]:\\
&=\exp(-\mathrm{i}g\vec{\beta}^*\cdot\vec{a}^\dagger)\exp(-\mathrm{i}g\vec{\beta}\cdot\vec{a})\exp\left(-\frac{g^2}{2}|\vec{\beta}|^2\right)\\
&=\exp[-\mathrm{i}g(\vec{\beta}^*\cdot\vec{a}^\dagger+\vec{\beta}\cdot\vec{a})]
\end{aligned} \tag{9.238}$$

使用 Weyl 编序记号和 Wigner 算符的 Weyl 编序形式(4.28)把式(9.237)改为

$$\begin{aligned}
&\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\vec{\lambda}^2+\vec{\mu}^2}\sqrt{\pi}}:\exp\left[-\frac{1}{\vec{\lambda}^2+\vec{\mu}^2}(x-\vec{\lambda}\cdot\vec{X}-\vec{\mu}\cdot\vec{P})^2\right]:\mathrm{e}^{-\mathrm{i}gx}\\
&=\exp[-\mathrm{i}g(\vec{\lambda}\cdot\vec{X}+\vec{\mu}\cdot\vec{P})]=\vdots\exp[-\mathrm{i}g(\vec{\lambda}\cdot\vec{X}+\vec{\mu}\cdot\vec{P})]\vdots
\end{aligned}$$

$$= \int d^n \vec{x}' d^n \vec{p}' \vdots \delta(\vec{x}' - \vec{X}) \delta(\vec{p}' - \vec{P}) \vdots \exp[-ig(\vec{\lambda} \cdot \vec{x}' + \vec{\mu} \cdot \vec{p}')]$$

$$= \int d^n \vec{x}' d^n \vec{p}' \Delta(\vec{x}', \vec{p}') \exp[-ig(\vec{\lambda} \cdot \vec{x}' + \vec{\mu} \cdot \vec{p}')] \quad (9.239)$$

式(9.239)的右边可以看做傅里叶变换,那么它的逆变换为

$$\frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int \frac{dx d^n \vec{\lambda} d^n \vec{\mu}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\vec{\lambda}^2 + \vec{\mu}^2}} : \exp\left[-\frac{1}{\vec{\lambda}^2 + \vec{\mu}^2}(x - \vec{\lambda} \cdot \vec{X} - \vec{\mu} \cdot \vec{P})^2\right]:$$
$$e^{i(x - \vec{\lambda} \cdot \vec{x}' - \vec{\mu} \cdot \vec{p}')}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int d^n \vec{\lambda} d^n \vec{\mu} : \exp\left[i(\vec{\lambda} \cdot \vec{X} + \vec{\mu} \cdot \vec{P})^2 - \frac{1}{4}(\vec{\lambda}^2 + \vec{\mu}^2)\right]:$$
$$e^{i(-\vec{\lambda} \cdot \vec{x}' - \vec{\mu} \cdot \vec{p}')}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int d^{2n} \vec{\Lambda} : \exp\left[-\frac{1}{4}\vec{\Lambda}^2 - i\vec{\Lambda} \cdot (\vec{q} - \vec{Q})\right]:$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int d^{2n} \vec{\Lambda} : \exp\left\{-\frac{1}{4}[2i(\vec{q} - \vec{Q}) + \vec{\Lambda}]^2 - (\vec{q} - \vec{Q})^2\right\}:$$

$$= \frac{1}{\pi^n} : \exp[-(\vec{q} - \vec{Q})^2] := \Delta(\vec{x}', \vec{p}') \quad (9.240)$$

这样就得到了 Wigner 算符,所以 Wigner 函数为

$$\langle \psi | \Delta(\vec{x}', \vec{p}') | \psi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int \frac{dx d^n \vec{\lambda} d^n \vec{\mu}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\vec{\lambda}^2 + \vec{\mu}^2}} \langle \psi |$$
$$: \exp\left[-\frac{1}{\vec{\lambda}^2 + \vec{\mu}^2}(x - \vec{\lambda} \cdot \vec{X} - \vec{\mu} \cdot \vec{P})^2\right]:$$
$$| \psi \rangle e^{i(x - \vec{\lambda} \cdot \vec{x}' - \vec{\mu} \cdot \vec{p}')} \quad (9.241)$$

最后,给出式(9.237)的一个简洁形式,令 $b = \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{a}}{\beta}$,则

$$[b^\dagger, b] = \frac{1}{\beta^2} \sum_{i, j=1}^{n} \beta_i \beta_j^* [a_i, a_j^\dagger] = 1 \quad (9.242)$$

可见 $b$ 是消灭算符，所以式(9.237)就变为

$$\int \mathrm{d}^n\vec{x}'\mathrm{d}^n\vec{p}'\delta(x-\vec{\lambda}\cdot\vec{x}'-\vec{\mu}\cdot\vec{p}')\Delta(\vec{x}',\vec{p}')$$

$$=\frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}}:\exp\left[-\frac{1}{2\beta^2}(x-\vec{\beta}\cdot\vec{a}-\vec{\beta}^*\cdot\vec{a}^\dagger)^2\right]:$$

$$=\frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}}:\exp\left\{-\frac{1}{2\beta^2}[x-\beta(b+b^\dagger)]^2\right\}:$$

$$=\frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\beta^2}+\frac{x}{\beta}b^\dagger-\frac{1}{2}b^{\dagger 2}\right):\mathrm{e}^{-b^\dagger b}:\exp\left(\frac{x}{\beta}b-\frac{1}{2}b^2\right)$$

(9.243)

综上所述，量子 tomography 理论是可以推广到超平面上的.

## 9.12 密度算符用量子 tomogram 的展开式

本节讨论 Weyl 对应式

$$H=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\mathrm{d}p\Delta(p,x)h(p,x) \tag{9.244}$$

在傅里叶切片变换下的新表达式及相应的物理意义，经典函数 $h(p,x)$是算符 $H$ 的 Weyl 对应. 现在问，当它经历了如下的傅里叶切片变换后

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\mathrm{d}ph(p,x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}g(x\cos\varphi+p\sin\varphi)}\equiv S(g,\varphi), \tag{9.245}$$

$\Delta(p,x)$相应地应作什么变换才能使式(9.244)仍成立. 下面我们将说明 $\Delta(p,x)$也须作傅里叶切片变换.

考虑到 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}g(\lambda X+\nu P)}$ 的 Weyl 对应是 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}g(\lambda x+\nu p)}$，令 $g'/\sqrt{\lambda^2+\nu^2}=g$，我们有

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}g(\lambda X+\nu P)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx dp \Delta(p, x) e^{-ig'\left(\frac{\lambda x + \nu p}{\sqrt{\lambda^2+\nu^2}}\right)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx dp \Delta(p, x) e^{-ig'(x\cos\varphi + p\sin\varphi)}, \qquad (9.246)$$

其中

$$\cos\varphi = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\nu^2}}, \ \sin\varphi = \frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2+\nu^2}} \qquad (9.247)$$

利用式(9.24)和式(9.25)又有

$$e^{-ig(\lambda X+\nu P)} = \int_{-\infty}^{\infty} dy \mid y\rangle_{\lambda,\nu\ \lambda,\nu}\langle y \mid e^{-igy}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx dp \Delta(p, x) e^{-ig'(x\cos\varphi + p\sin\varphi)}. \qquad (9.248)$$

将其右边看作是一个傅里叶变换,则其逆变换为

$$\Delta(p, x) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} dg' \mid g' \mid \int_0^{\pi} d\varphi e^{ig'(x\cos\varphi+p\sin\varphi)}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \mid y\rangle_{\lambda,\nu\ \lambda,\nu}\langle y \mid e^{-ig'y/\sqrt{\lambda^2+\nu^2}}$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int dy \int_{-\infty}^{\infty} dg' \mid g' \mid \int_0^{\pi} d\varphi \mid y\rangle_{\lambda,\nu\ \lambda,\nu}\langle y \mid \times$$
$$e^{-ig'[y/\sqrt{\lambda^2+\nu^2} - (x\cos\varphi + p\sin\varphi)]} \qquad (9.249)$$

此式两边乘上 $h(p, x)$ 积分可得

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} dx dp \Delta(p, x) h(p, x)$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int dy \int_{-\infty}^{\infty} dg' \mid g' \mid \times$$
$$\int_0^{\pi} d\varphi \mid y\rangle_{\lambda,\nu\ \lambda,\nu}\langle y \mid e^{-ig'[y/\sqrt{\lambda^2+\nu^2}]} \times$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx dp h(p, x) e^{ig'(x\cos\varphi+p\sin\varphi)}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int dy\int_{-\infty}^{\infty}dg'\mid g'\mid\int_0^{\pi}d\varphi\mid y\rangle_{\lambda,\nu\ \lambda,\nu}\langle y\mid\times$$

$$e^{-ig'[y/\sqrt{\lambda^2+\nu^2}]}S(g',\varphi) \tag{9.250}$$

再用

$$\int_{-\infty}^{\infty}dy\mid y\rangle_{\lambda,\nu\ \lambda,\nu}\langle y\mid e^{-ig'[y/\sqrt{\lambda^2+\nu^2}]}$$

$$=e^{-ig'(\lambda X+\nu P)/\sqrt{\lambda^2+\nu^2}}, \tag{9.251}$$

可见

$$H=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dg'}{2\pi}\mid g'\mid\int_0^{\pi}d\varphi e^{-ig'(\lambda X+\nu P)/\sqrt{\lambda^2+\nu^2}}S(g',\varphi) \tag{9.252}$$

这是 $H$ 用 $S(g',\varphi)$展开的新表达式.

当 $\sqrt{\lambda^2+\nu^2}=1$，上式变为

$$H=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dg}{2\pi}\mid g\mid\int_0^{\pi}d\varphi e^{-ig(X\cos\varphi+P\sin\varphi)}S(g,\varphi). \tag{9.253}$$

此式表明，当 $S(g,\varphi)$是 $H$ 算符的经典 Weyl 对应的傅里叶切片变换函数，那么 $e^{-ig(X\cos\varphi+P\sin\varphi)}$是 Wigner 算符 $\Delta(x,p)$的傅里叶切片变换. 可以进一步分析 $S(g,\varphi)$的物理意义，根据式(9.9)我们知道它可以表达为一个投影子的傅氏变换

$$S(g,\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}dy e^{igy}P_{\varphi}(y) \tag{9.254}$$

于是用式(9.245)就有

$$\begin{aligned}P_{\varphi}(y)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dg e^{-igy}S(g,\varphi)\\&=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}dx dp h(p,x)\int_{-\infty}^{\infty}dg e^{-ig(y-x\cos\varphi-p\sin\varphi)}\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dx dp h(p,x)\delta(y-x\cos\varphi-p\sin\varphi)\end{aligned}$$

$$= \mathrm{Tr}\left[H\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\mathrm{d}p\Delta(p,\ x)\delta(y - x\cos\varphi - p\sin\varphi)\right]$$

$$= \mathrm{Tr}[H \mid y\rangle_{\varphi\ \varphi}\langle y \mid] \tag{9.255}$$

于是有

$$S(g,\ \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\mathrm{e}^{\mathrm{i}gy}\mathrm{Tr}[\rho \mid y\rangle_{\varphi\ \varphi}\langle y \mid]. \tag{9.256}$$

由于 $\mathrm{Tr}[H|y\rangle_{\varphi\ \varphi}\langle y|]$恰是 $H$ 的量子 tomogram，所以 $S(g,\ \varphi)$是它的傅里叶变换.

综上所述，式(9.253)是基于 Weyl 量子化方案的一个新的展开式，当其中的 $H$ 取密度算符时，式(9.253)就是密度算符用量子 tomogram 来展开的表达式，因而值得重视.

## 参考文献


[1] Raymer M G. Measuring the quantum mechanical wave function [J]. Contemporary Physics, 1997, 38: 343 - 355; Vogel K, Risken H. Determination of quasiprobability distributions in terms of probability distributions for the rotated quadrature phase [J]. Phys. Rev. A, 1989, 40: 2847 - 2849.

[2] 李海清，黄志尧. 特种检测技术及应用[M]. 杭州：浙江大学出版社，2000.

[3] Cormack A M. Representation of a function by its integrals, with some radiological application [J]. J. Appl. Phys., 1963, 34 (9): 2722 - 2727.

[4] Heaman G T. Image reconstruction from projections: the fundamentals of computerized tomography [M]. New York: Academic Press, 1980.

[5] 陈立成. 层析成像的数学方法与应用[M]. 成都：西南交通大学出版社，1994.

[6] Avinach C. Kak, Malcolm Slaney. Principles of Computerized Tomographic Imaging SIAM [M]. New York: Philadelphia, 2001.

[7] Fan Hongyi, Lu Hailiang, Fan Yue. Newton - Leibniz integration for ket - bra operators in quantum mechanics and derivation of entangled

state representations [J]. Ann. of Phys. , 2006,321:480 - 494.

[8] Fan Hongyi. Operator ordering in quantum optics and Dirac's symbolic method [J]. Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics, 2003,5:147.

[9] Helgason S. The Randon Transform [M]. Boston: Massachusetts: Birkhauser 1980; A. Wunsche. Radon transform and pattern functions in quantum tomography [J]. J. Mod. Opt. , 1997,44 (11/12):2293 - 2331.

[10] Fan Hongyi, Guo Qin. Quantum phase space theory based on intermediate coordinate-momentum representation [J]. Mod. Phys. Lett. B, 2007,21(27):1831 - 1836.

[11] Fan Hongyi, Lv Cuihong. Explicit pure-state density operator structure for quantum tomography [J]. J. Math. Phys. , 2009,50:1.

[12] Fan Hongyi, Hu Liyun. Optical Fresnel transformation and quantum tomography [J]. Opt. Commun. , 2009,282:3734 - 3736.

[13] Lv Cuihong, Fan Hongyi. Application of the intermediate coordinate-momentum representation [J]. to be published.

[14] Xie Chuanmei, Fan Hongyi. A new theorem for calculating quantum tomogram of density operators. [J]. Chin. Phys. B, 2011, 20:060303.

[15] Fan Hongyi, Niu Jinbo. On the Radon transformation of Wigner function altered with various optical processes [J]. Opt. Commun. , 2010,283(17):3296 - 3300.

[16] Fan Hongyi, Jiang Nianquan. On the relation between the characteristic function of density operator and the tomogram [J]. Chin. Phys. Lett. , 2009,26:110302.

[17] Chen Junhua, Fan Hongyi. Radon transforms of the Wigner operator on hyperplane [J]. Chin. Phys. B, 2009,18:3714 - 3718.

# 第10章 描写相空间量子力学的新表象

基于 EPR 连续纠缠态表象，本章将构建一种广义相空间表象. 我们给出 Torres - Vega - Frederick 广义相空间表示的具体量子态，并将其推广到了纠缠情况，对于态的性质也进行了详细的探讨.

## 10.1 单模情形[1]

1932 年，Wigner 发表了一篇很著名的文章，量子力学在相空间的阐述由此翻开了新的一页，从那以后，相空间技术被广泛应用于理论物理的各个领域. 其主要思想是将密度算符表示为经典相空间$(q,\ p)$中的准分布函数. 更深入的推广是用 $\Gamma$ 表示相空间参数为$(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)$的一个代表点，然后研究是否可以将量子态表示为波函数 $\psi(\Gamma)$（其特殊情况下约化为坐标表象或动量表象波函数）. 1993 年，Torres - Vega 和 Frederick (TF)提出用波函数$\psi(\Gamma)$表示（纯的）量子态，记 $\varphi(q)$ 是坐标表象中的波函数，那么 $\varphi(q)$ 过渡到$\psi(\Gamma)$要经过如下的积分变换

$$\psi(\Gamma) = \int K(\Gamma;\ q')\varphi(q')\mathrm{d}q'$$

其中 $K(\Gamma;\ q')$是积分核，并且满足

$$\int \overline{K}(\Gamma;\ q')K(\Gamma;\ q'')\mathrm{d}\Gamma = \delta(q' - q'')$$

$\mathrm{d}\Gamma$ 代表对相空间的一种度量，很明显，对于 $K$ 的选择存在很大的自由度. 例如与相干态表象相联系的一种积分核为

$$K_{\mathrm{CS}}(q,\ p;\ q') = \langle \Gamma \mid q' \rangle$$

其中

$$\langle \Gamma \mid q' \rangle = (\lambda^2 \pi)^{-1/4} \exp\left\{-\frac{(q'-q)^2}{2\lambda^2} - \frac{\mathrm{i}p}{\hbar}(q'-q)\right\}$$

$|\Gamma\rangle$是对应于$\Gamma = (\lambda^{-1} q + \mathrm{i}\lambda \hbar^{-1} p)/\sqrt{2}$的 Glauber 相干态表象. 该积分核是 Torres - Vega 和 Frederick 建立量子力学相空间表示的出发点,如果 $\varphi(q)$满足标准的薛定谔方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(q,\ t) = \left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q)\right]\varphi(q,\ t)\ ,\quad \hbar = 1 \tag{10.1}$$

那么从 $\varphi(q)$通过 $K_{\mathrm{CS}}(\Gamma;\ q)$得到的 $\psi(\Gamma)$就满足方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi(\Gamma,\ t) = \left[-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + V\left(q + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial p}\right)\right]\psi(\Gamma,\ t) \tag{10.2}$$

做规范变换 $\psi'(q,\ p) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}pq/2\hbar}\psi(q,\ p)$, 就可以把上式纳入到一个更广义的方程,即

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi'(\Gamma,\ t) = \left[-\frac{1}{2m}P^2 + V(Q)\right]\psi'(\Gamma,\ t)$$

引入实参数 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ 且满足 $\beta\gamma - \alpha\delta = 1$, Torres - Vega 和 Frederick 用 Dirac 符号表示态矢 $|\Gamma\rangle$与坐标算符和动量算符的联系

$$\langle \Gamma \mid Q = \left(\alpha q + \mathrm{i}\beta\frac{\partial}{\partial p}\right)\langle \Gamma \mid$$

$$\langle \Gamma \mid P = \left(\gamma p + \mathrm{i}\delta\frac{\partial}{\partial q}\right)\langle \Gamma \mid \tag{10.3}$$

这个表示很适合描述经典和量子刘维尔方程之间的对应,所以它有着很广泛的应用. 但是从 1993 年至今,这个表示能否构成一个

表象，$\langle\Gamma|$ 的具体形式未曾揭晓，相应的性质没有人给出过，所以我们在本节中，利用 IWOP 积分技术，来研究这个问题.

我们先给出这个态的具体形式，

$$|\Gamma\rangle \equiv (2\sqrt{-\alpha\beta\gamma\delta})^{1/2}\exp\left[\frac{\alpha q^2}{2\delta}-\frac{\gamma p^2}{2\beta}+\sqrt{2}(\alpha q+\mathrm{i}\gamma p)a^\dagger+\frac{\beta\gamma+\alpha\delta}{2}a^{\dagger 2}\right]|0\rangle \tag{10.4}$$

为了满足波函数平方可积的要求，需要有 $\frac{\alpha}{\delta}<0$， $\frac{\gamma}{\beta}>0$. 下面验证它满足本征方程(10.3)，用湮灭算符 $a$ 作用到态 $|\Gamma\rangle$ 上得

$$a|\Gamma\rangle=\sqrt{2}\left(\alpha q+\mathrm{i}\gamma p+\frac{\beta\gamma+\alpha\delta}{2}a^\dagger\right)|\Gamma\rangle \tag{10.5}$$

利用 $Q=\frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}$， $P=\frac{a-a^\dagger}{\mathrm{i}\sqrt{2}}$ 和 $\beta\gamma-\alpha\delta=1$ 有

$$\begin{aligned}\langle\Gamma|Q&=\langle\Gamma|\frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}=\langle\Gamma|\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+\alpha q-\mathrm{i}\gamma p+\frac{\beta\gamma+\alpha\delta}{2}a\right)\\&=\langle\Gamma|(\alpha q-\mathrm{i}\gamma p+\sqrt{2}\beta\gamma a)=\left(\alpha q+\mathrm{i}\beta\frac{\partial}{\partial p}\right)\langle\Gamma|\end{aligned} \tag{10.6}$$

同理，可以给出

$$\langle\Gamma|P=\langle\Gamma|(\gamma p+\mathrm{i}\alpha q+\mathrm{i}\sqrt{2}\alpha\delta a)=\left(\gamma p+\mathrm{i}\delta\frac{\partial}{\partial q}\right)\langle\Gamma| \tag{10.7}$$

可见 $|\Gamma\rangle$ 即为 TF 所期望的相空间新表象.

再利用有序算符内的积分技术，来研究 $|\Gamma\rangle$ 的性质：

**1）完备性**

利用单模真空投影算符的正规乘积形式 $|0\rangle\langle 0|=:\exp(-a^\dagger a):$ 及 $\beta\gamma-\alpha\delta=1$ 很容易证明

$$\frac{1}{2|\beta\delta|}\iint\frac{\mathrm{d}q\mathrm{d}p}{\pi}|\Gamma\rangle\langle\Gamma|$$
$$=\sqrt{-\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}}\int\frac{\mathrm{d}q\mathrm{d}p}{\pi}:\exp\left[\frac{\alpha}{\delta}(q+\delta Q)^2-\frac{\gamma}{\beta}(p-\beta P)^2\right]:=1 \tag{10.8}$$

这个例子说明了 IWOP 技术的优越性.

**2）非正交性**

利用$|\Gamma\rangle$和相干态 $|z\rangle=\exp(-|z|^2/2+za^\dagger)|0\rangle$ 的内积，

$$\langle\Gamma|z\rangle=(2\sqrt{-\alpha\beta\gamma\delta})^{1/2}\exp\left[-\frac{|z|^2}{2}+\frac{\alpha q^2}{2\delta}-\frac{\gamma p^2}{2\beta}+\sqrt{2}(\alpha q-\mathrm{i}\gamma p)z+\frac{\beta\gamma+\alpha\delta}{2}z^2\right] \tag{10.9}$$

以及完备性$\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}|z\rangle\langle z|=1$，可以求出内积

$$\langle\Gamma|\Gamma'\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\langle\Gamma|z\rangle\langle z|\Gamma'\rangle$$
$$=2\sqrt{-\alpha\beta\gamma\delta}\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\exp\left[-|z|^2+\sqrt{2}(\alpha q-\mathrm{i}\gamma p)z+\sqrt{2}(\alpha q'+\mathrm{i}\gamma p')z^*+\frac{\beta\gamma+\alpha\delta}{2}(z^2+z^{*2})+\frac{\alpha q^2}{2\delta}-\frac{\gamma p^2}{2\beta}+\frac{\alpha q'^2}{2\delta}-\frac{\gamma p'^2}{2\beta}\right] \tag{10.10}$$

再由积分公式(4.147)对式(10.10)积分后得到

$$\langle\Gamma|\Gamma'\rangle=\exp\left[\frac{\alpha}{4\beta\gamma\delta}(q-q')^2+\frac{\gamma}{4\alpha\beta\delta}(p-p')^2+\frac{\mathrm{i}(\beta\gamma+\alpha\delta)}{2\beta\delta}(pq-p'q')+\frac{\mathrm{i}}{2\beta\delta}(pq'-qp')\right] \tag{10.11}$$

只有当$q=q'$， $p=p'$时，$\langle\Gamma|\Gamma'\rangle=1$；一般情况下，$\langle\Gamma|\Gamma'\rangle\neq$

$\delta(\Gamma-\Gamma')$，所以 Torres - Vega - Frederick 最初的结论，$\langle\Gamma\mid\Gamma'\rangle=\delta(\Gamma-\Gamma')$，是不正确的.

另一方面也可以得出下面的内积

$$\langle q'\mid\Gamma\rangle=\left(\frac{-\alpha\delta}{\pi\beta\gamma}\right)^{1/4}\exp\left[\frac{\alpha}{2\beta\gamma\delta}(q+\delta q')^2+\mathrm{i}p(q'-\alpha q)/\beta\right] \tag{10.12}$$

$$\langle p'\mid\Gamma\rangle=\left(\frac{-\beta\gamma}{\pi\alpha\delta}\right)^{1/4}\exp\left[\frac{\gamma}{2\alpha\beta\delta}(p-\beta p')^2+\mathrm{i}q(p'-\gamma p)/\delta\right] \tag{10.13}$$

**3) $|\Gamma\rangle\langle\Gamma|$ 的 Weyl 编序**

根据化算符为 Weyl 编序形式的公式(4.58)和 Weyl 编序算符内的积分技术，可以求出$|\Gamma\rangle\langle\Gamma|$的 Weyl 编序为

$$\begin{aligned}|\Gamma\rangle\langle\Gamma|&=4\sqrt{-\alpha\beta\gamma\delta}\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\,\vdots\exp[2(z^*a-za^\dagger+a^\dagger a)]\times\\&\quad\langle-z\mid:\exp\left[\frac{\alpha}{\delta}(q+\delta Q)^2-\frac{\gamma}{\beta}(p-\beta P)^2\right]:\mid z\rangle\,\vdots\\&=2\,\vdots\exp\left[\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}\left(\frac{p}{\beta}-P\right)^2+\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}\left(\frac{q}{\delta}+Q\right)^2\right]\vdots\end{aligned} \tag{10.14}$$

根据 Weyl 对应规则，Weyl 编序算符的经典 Weyl 对应可以由替代 $Q\to q$, $P\to p$ 得到，所以有

$$\begin{aligned}&\vdots\exp\left[\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}\left(\frac{p}{\beta}-P\right)^2+\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}\left(\frac{q}{\delta}+Q\right)^2\right]\vdots\\&\to\exp\left[\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}\left(\frac{p}{\beta}-p'\right)^2+\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}\left(\frac{q}{\delta}+q'\right)^2\right]\end{aligned} \tag{10.15}$$

即

$$\begin{aligned}|\Gamma\rangle\langle\Gamma|=2\int\mathrm{d}q'\mathrm{d}p'\,\vdots\delta(q'-Q)\delta(p'-P)\vdots\times\\\exp\left[\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}\left(\frac{p}{\beta}-p'\right)^2+\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}\left(\frac{q}{\delta}+q'\right)^2\right]\end{aligned}$$

$$= 2\int dq' dp' \Delta(q', p') \exp\left[\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}\left(\frac{p}{\beta} - p'\right)^2 + \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}\left(\frac{q}{\delta} + q'\right)^2\right] \tag{10.16}$$

考虑到 Wigner 算符的正规乘积形式(4.12),可以从上式算出

$$|\Gamma\rangle\langle\Gamma| = 2\int \frac{dq' dp'}{\pi} : \exp\{-(q' - Q)^2 - (p' - P)^2\} : \times \exp\left[\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}\left(\frac{p}{\beta} - p'\right)^2 + \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}\left(\frac{q}{\delta} + q'\right)^2\right]$$
$$= 2\sqrt{-\alpha\beta\gamma\delta} : \exp\left[\frac{\alpha}{\delta}(q + \delta Q)^2 - \frac{\gamma}{\beta}(p - \beta P)^2\right]: \tag{10.17}$$

这和方程(10.8)是自洽的.特别地,当 $\beta = -\delta = 1$, $\alpha = \frac{\kappa}{1+\kappa}$, $\gamma = \frac{1}{1+\kappa}$ 时,式(10.16)给出相应于 Husimi 函数的算符,

$$|p, q\rangle_{\kappa\,\kappa}\langle p, q| = 2\int dp' dq' \Delta_w(q', p') \exp\left[-\frac{1}{\kappa}(p - p')^2 - \kappa(q' - q)^2\right] \tag{10.18}$$

所以也称 $|\Gamma\rangle\langle\Gamma|$ 是推广的 Husimi 算符.

**4) $|\Gamma\rangle\langle\Gamma|$ 的边缘分布**

由 $|\Gamma\rangle\langle\Gamma|$ 的 Weyl 编序形式(10.14),易得

$$\int \frac{dq}{\sqrt{\pi}} |\Gamma\rangle\langle\Gamma|$$
$$= 2\sqrt{-\frac{\gamma\delta\beta}{\alpha}} \exp\left[\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}\left(\frac{p}{\beta} - P\right)^2\right] \tag{10.19}$$

所以

$$\int \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\pi}} |\langle \Gamma | \Psi \rangle|^2 = \langle \Psi | \int \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\pi}} |\Gamma\rangle\langle\Gamma|\Psi\rangle$$

$$= 2\sqrt{-\frac{\gamma\delta\beta}{\alpha}} \int \mathrm{d}p' \langle \Psi | \mathrm{e}^{\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}\left(\frac{p}{\beta}-P\right)^2} | p' \rangle \langle p' | \Psi \rangle$$

$$= 2\sqrt{-\frac{\gamma\delta\beta}{\alpha}} \int \mathrm{d}p' \mathrm{e}^{\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}\left(\frac{p}{\beta}-p'\right)^2} |\Psi(p')|^2 \tag{10.20}$$

式(10.20)是$|\Psi(p')|^2$的高斯展宽形式,它给出了$\langle\Gamma|$表象的波函数模平方和动量表象的波函数模平方之间的关系.另一方面,对于$\mathrm{d}p$积分可得

$$\int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{\pi}} |\Gamma\rangle\langle\Gamma|$$

$$= 2\sqrt{-\frac{\delta\alpha\beta}{\gamma}} \exp\left[\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}\left(\frac{q}{\delta}+Q\right)^2\right] \tag{10.21}$$

所以

$$\langle \Psi | \int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{\pi}} |\Gamma\rangle\langle\Gamma|\Psi\rangle = 2\sqrt{-\frac{\delta\alpha\beta}{\gamma}} \int \mathrm{d}q' \mathrm{e}^{\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}\left(\frac{q}{\delta}+q'\right)^2} |\Psi(q')|^2 \tag{10.22}$$

是$|\Psi(q')|^2$的高斯展宽.

**5) 测不准原理**

由式(10.12)及坐标表象的完备性得

$$\langle Q^2 \rangle = \langle \Gamma | Q^2 | \Gamma \rangle = \int \mathrm{d}q' q'^2 \langle \Gamma | q' \rangle \langle q' | \Gamma \rangle$$

$$= \sqrt{-\frac{\delta\alpha}{\pi\beta\gamma}} \int \mathrm{d}q' q'^2 \exp\left[\frac{\delta\alpha}{\beta\gamma}\left(\frac{q}{\delta}+q'\right)^2\right]$$

$$= \frac{q^2}{\delta^2} - \frac{1}{2}\frac{\beta\gamma}{\delta\alpha} \tag{10.23}$$

和

$$\langle Q\rangle = \sqrt{-\frac{\delta\alpha}{\pi\beta\gamma}}\int \mathrm{d}q'q'\exp\left[\frac{\delta\alpha}{\beta\gamma}\left(\frac{q}{\delta}+q'\right)^2\right] = -\frac{q}{\delta} \tag{10.24}$$

同理也可得

$$\langle P^2\rangle = \frac{p^2}{\beta^2} - \frac{1}{2}\frac{\delta\alpha}{\beta\gamma},\ \langle P\rangle = \frac{p}{\beta} \tag{10.25}$$

所以有

$$\begin{aligned}\langle \Delta Q^2\rangle &= \langle Q^2\rangle - \langle Q\rangle^2 = -\frac{1}{2}\frac{\beta\gamma}{\delta\alpha}\\ \langle \Delta P^2\rangle &= \langle P^2\rangle - \langle P\rangle^2 = -\frac{1}{2}\frac{\delta\alpha}{\beta\gamma}\end{aligned} \tag{10.26}$$

即如同相干态那样，$|\Gamma\rangle$也使测不准关系取极小值

$$\sqrt{\langle \Delta Q^2\rangle\langle \Delta P^2\rangle} = \frac{1}{2} \tag{10.27}$$

**6) $|\Gamma\rangle$的 Wigner 函数**

根据 Wigner 算符在相干态表象的形式可以进行计算（其中 $\tau \equiv \frac{\bar{q}+\mathrm{i}\,\bar{p}}{\sqrt{2}}$）

$$\begin{aligned}W(\tau) &= \mathrm{Tr}[\,|\Gamma\rangle\langle\Gamma|\Delta(\tau)]\\ &= \int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi^2}\langle\Gamma \mid \tau+z\rangle\langle\tau-z \mid \Gamma\rangle \mathrm{e}^{\tau z^*-z\tau^*}\end{aligned} \tag{10.28}$$

再根据式(10.17)得到，

$$\begin{aligned}W(\tau) = {} & 2\sqrt{-\alpha\beta\gamma\delta}\int\frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi^2}\langle\tau-z\mid :\exp\left[\frac{\alpha}{\delta}(q+\delta Q)^2 -\right.\\ & \left.\frac{\gamma}{\beta}(p-\beta P)^2\right]:\mid\tau+z\rangle \mathrm{e}^{\tau z^*-z\tau^*}\\ = {} & \frac{1}{\pi}\exp\left\{\frac{1}{\delta\beta}\left[\frac{\gamma}{\alpha}(p-\beta\bar{p})^2+\frac{\alpha}{\gamma}(q+\delta\bar{q})^2\right]\right\}\end{aligned} \tag{10.29}$$

当 $\beta\gamma+\alpha\delta=0$，$\beta=-\delta=1$ 时，式(10.29)就退化到相干态的 Wigner 函数. 从式(10.29)也可以看出，态 $|\Gamma\rangle$ 的 Wigner 函数拥有很好的特性：它在 $q$ 方向的边缘分布给出高斯函数 $\exp\left[\frac{\alpha}{\delta\beta\gamma}(\delta\bar{q}+q)^2\right]$，在 $p$ 方向则是 $\exp\left[\frac{\gamma}{\delta\alpha\beta}(p-\beta\bar{p})^2\right]$，因此可用以定义广义 Husimi 函数.

综合本节对于相空间表象 $|\Gamma\rangle$ 的讨论，可以看出 $|\Gamma\rangle$ 同时拥有动量表象和坐标表象的成分：当 $\alpha=0$ $(\beta\gamma=1)$，$|\Gamma\rangle$ 变成动量表象 $|\gamma p\rangle$；当 $\gamma=0$ $(\delta\alpha=-1)$，$|\Gamma\rangle$ 变成坐标表象 $|\alpha q\rangle$. 而当 $\beta\gamma=-\delta\alpha=\frac{1}{2}$ 时就变为相干态表象 $|z=\sqrt{2}(\alpha q+i\gamma p)\rangle$. 尽管由 $\beta\gamma-\alpha\delta=1$ 约束在参数空间 $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ 中的 $|\Gamma\rangle$ 的形式不是唯一的，可我们给出的具体形式(10.4)却是涵盖了坐标、动量、相干态表象的一个既简单又有用的表达. 利用内积形式(10.12)和(10.13)，算符 $\exp(\mathrm{i}\xi Q)$ 和 $\exp(\mathrm{i}\eta P)$ 对态 $|\Gamma\rangle$ 的作用也一目了然，即

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi Q}|\Gamma\rangle &= \int \mathrm{d}q\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi q}|q\rangle\langle q|\Gamma\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\alpha q}|p+\xi\beta,q\rangle_{\alpha\beta\gamma} \\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta P}|\Gamma\rangle &= \int \mathrm{d}p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta p}|p\rangle\langle p|\Gamma\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\gamma\eta}|p,q+\gamma\eta\rangle_{\alpha\beta\gamma}
\end{aligned}
\tag{10.30}
$$

这进一步验证了我们的结论：相空间表象 $|\Gamma\rangle$ 涵盖了动量表象和坐标表象.

## 10.2 纠缠情形[2]

随着纠缠态表象的广泛应用，它受到越来越多的青睐，那么自然会想到，上节的情况能否推广到纠缠情况呢？这就是本节要介绍的内容.

基于纠缠态表象 $\langle\eta|$ 和 $\langle\xi|$，我们欲将式(10.4)推广到纠缠情况，以 ${}_e\langle\Gamma|$ 来标志(下脚标 e 表示纠缠). 我们要求将算符 $Q_1-Q_2$ (相对坐标)和 $P_1+P_2$ (总动量)作用到 ${}_e\langle\Gamma|$ 的结果是

$$ {}_e\langle\Gamma| \frac{Q_1 - Q_2}{\sqrt{2}} = \left(\alpha\sigma_1 + i\beta\frac{\partial}{\partial\tau_2}\right){}_e\langle\Gamma| $$

$$ {}_e\langle\Gamma| \frac{P_1 + P_2}{\sqrt{2}} = \left(\alpha\sigma_2 - i\beta\frac{\partial}{\partial\tau_1}\right){}_e\langle\Gamma| \quad (10.31) $$

其中 $\sigma_1 + i\sigma_2 = \sigma$ 和 $\tau_1 + i\tau_2 = \tau$ 是复参数. 而要求将 $Q_1 + Q_2$(质心坐标) 和 $P_1 - P_2$(相对动量) 作用到 ${}_e\langle\Gamma|$ 的结果是

$$ {}_e\langle\Gamma| \frac{Q_1 + Q_2}{\sqrt{2}} = \left(\gamma\tau_1 - i\delta\frac{\partial}{\partial\sigma_2}\right){}_e\langle\Gamma| $$

$$ {}_e\langle\Gamma| \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{2}} = \left(\gamma\tau_2 + i\delta\frac{\partial}{\partial\sigma_1}\right){}_e\langle\Gamma| \quad (10.32) $$

${}_e\langle\Gamma|$ 是方程(10.4)的推广,所以把它称为广义的相空间表象(GPSR). 下面将给出此态的具体形式. 在 $|\eta\rangle$ 表象, $\eta = \eta_1 + i\eta_2$, 有

$$ \frac{Q_1 + Q_2}{\sqrt{2}}|\eta\rangle = -i\frac{\partial}{\partial\eta_2}|\eta\rangle = \left(\frac{\partial}{\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\eta^*}\right)|\eta\rangle $$

$$ \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{2}}|\eta\rangle = i\frac{\partial}{\partial\eta_1}|\eta\rangle = i\left(\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\eta^*}\right)|\eta\rangle \quad (10.33) $$

按照式(10.31)和式(10.32)的要求,得到

$$ \left[\frac{\gamma}{2}(\tau + \tau^*) + \delta\left(\frac{\partial}{\partial\sigma} - \frac{\partial}{\partial\sigma^*}\right)\right]{}_e\langle\Gamma|\eta\rangle = \left(\frac{\partial}{\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\eta^*}\right){}_e\langle\Gamma|\eta\rangle $$

$$ \left[\frac{\alpha}{2i}(\sigma - \sigma^*) - i\beta\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial\tau^*}\right)\right]{}_e\langle\Gamma|\eta\rangle = \frac{\eta - \eta^*}{2i}{}_e\langle\Gamma|\eta\rangle $$

$$ (10.34) $$

和

$$ \left[\frac{\alpha}{2}(\sigma + \sigma^*) - \beta\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial}{\partial\tau^*}\right)\right]{}_e\langle\Gamma|\eta\rangle = \frac{\eta + \eta^*}{2}{}_e\langle\Gamma|\eta\rangle $$

$$ \left[\frac{\gamma}{2i}(\tau - \tau^*) + i\delta\left(\frac{\partial}{\partial\sigma} + \frac{\partial}{\partial\sigma^*}\right)\right]{}_e\langle\Gamma|\eta\rangle = i\left(\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\eta^*}\right){}_e\langle\Gamma|\eta\rangle $$

$$ (10.35) $$

从上面 4 个方程可以得到，

$$\left(\alpha\sigma+2\beta\frac{\partial}{\partial\tau^*}\right){}_e\langle\Gamma\mid\eta\rangle=\eta{}_e\langle\Gamma\mid\eta\rangle$$

$$\left(\alpha\sigma^*-2\beta\frac{\partial}{\partial\tau}\right){}_e\langle\Gamma\mid\eta\rangle=\eta^*{}_e\langle\Gamma\mid\eta\rangle$$

$$\left(\gamma\tau^*+2\delta\frac{\partial}{\partial\sigma}\right){}_e\langle\Gamma\mid\eta\rangle=2\frac{\partial}{\partial\eta}{}_e\langle\Gamma\mid\eta\rangle$$

$$\left(\gamma\tau-2\delta\frac{\partial}{\partial\sigma^*}\right){}_e\langle\Gamma\mid\eta\rangle=-2\frac{\partial}{\partial\eta^*}{}_e\langle\Gamma\mid\eta\rangle \tag{10.36}$$

这组方程的解为

$${}_e\langle\Gamma\mid\eta\rangle=C\exp\left\{\frac{\delta\alpha}{2\beta\gamma}\left|\frac{\sigma}{\delta}+\eta\right|^2+\frac{1}{2\beta}[\tau^*(\eta-\alpha\sigma)-\tau(\eta^*-\alpha\sigma^*)]\right\} \tag{10.37}$$

$C$ 是由 ${}_e\langle\Gamma\mid\Gamma\rangle_e=1$ 决定的归一化常数

$$C=2\sqrt{-\delta\beta\gamma\alpha} \tag{10.38}$$

利用$\langle\eta|$表象的完备性以及积分公式(4.114)可以求得

$$\begin{aligned}{}_e\langle\Gamma\mid&=\int\frac{d^2\eta}{\pi}{}_e\langle\Gamma|\eta\rangle\langle\eta|\\&=\langle 00\mid C\exp\left[\frac{\alpha\mid\sigma\mid^2}{2\delta}-\frac{\gamma\mid\tau\mid^2}{2\beta}+(\alpha\sigma^*+\gamma\tau^*)a_1+\right.\\&\qquad\left.(\gamma\tau-\alpha\sigma)a_2-(\beta\gamma+\alpha\delta)a_1a_2\right]\end{aligned} \tag{10.39}$$

即在 Fock 表象$|\Gamma\rangle_e$ 的表达式为

$$\begin{aligned}\mid\Gamma\rangle_e=2\sqrt{-\alpha\beta\gamma\delta}\exp&\left[\frac{\alpha\mid\sigma\mid^2}{2\delta}-\frac{\gamma\mid\tau\mid^2}{2\beta}+(\alpha\sigma+\gamma\tau)a_1^\dagger+\right.\\&\left.(\gamma\tau^*-\alpha\sigma^*)a_2^\dagger-(\beta\gamma+\alpha\delta)a_1^\dagger a_2^\dagger\right]\mid 00\rangle\end{aligned} \tag{10.40}$$

其中 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ 满足关系式$\beta\gamma-\alpha\delta=1$. 为了满足波函数平方可积的要求，需要有$\frac{\alpha}{\delta}<0$, $\frac{\gamma}{\beta}>0$. 从式(10.40) 可以看出，$|\Gamma\rangle_e$ 是既

包含了 $|\eta\rangle$ 表象又含有 $|\xi\rangle$ 表象的相空间纠缠态表象，实际上，当 $\alpha\delta=-1$，$\gamma=0$ 时，有 $|\Gamma\rangle_e \rightarrow |\eta=\alpha\sigma\rangle$；当 $\beta\gamma=1$，$\alpha=0$ 时给出 $|\Gamma\rangle_e \rightarrow |\xi=\gamma\tau\rangle$.

下面验证式(10.40)满足方程(10.31)和(10.32). 将 $a_j$，$j=1, 2$ 作用到 $|\Gamma\rangle_e$ 上得到

$$
\begin{aligned}
a_1 |\Gamma\rangle_e &= [(\alpha\sigma+\gamma\tau)-(\beta\gamma+\alpha\delta)a_2^\dagger]|\Gamma\rangle_e \\
a_2 |\Gamma\rangle_e &= [(\gamma\tau^*-\alpha\sigma^*)-(\beta\gamma+\alpha\delta)a_1^\dagger]|\Gamma\rangle_e
\end{aligned}
\tag{10.41}
$$

再由 $Q_j=\dfrac{a_j+a_j^\dagger}{\sqrt{2}}$，$P_j=\dfrac{a_j-a_j^\dagger}{i\sqrt{2}}$，$\beta\gamma-\alpha\delta=1$ 及关系式

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\sigma}{}_e\langle\Gamma| = {}_e\langle\Gamma|\left(\frac{\alpha\sigma^*}{2\delta}-\alpha a_2\right),\quad \frac{\partial}{\partial\sigma^*}{}_e\langle\Gamma| = {}_e\langle\Gamma|\left(\frac{\alpha\sigma}{2\delta}+\alpha a_1\right) \\
&\frac{\partial}{\partial\tau}{}_e\langle\Gamma| = {}_e\langle\Gamma|\left(-\frac{\gamma\tau^*}{2\beta}+\gamma a_2\right),\quad \frac{\partial}{\partial\tau^*}{}_e\langle\Gamma| = {}_e\langle\Gamma|\left(-\frac{\gamma\tau}{2\beta}+\gamma a_1\right)
\end{aligned}
\tag{10.42}
$$

得到

$$
\begin{aligned}
{}_e\langle\Gamma|\frac{Q_1+Q_2}{\sqrt{2}} &= {}_e\langle\Gamma|[-\delta(\alpha a_1+\alpha a_2)-\mathrm{i}\alpha\sigma_2+\gamma\tau_1] \\
&= \left[\gamma\tau_1+\delta\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}-\frac{\partial}{\partial\sigma^*}\right)\right]{}_e\langle\Gamma| \\
&= \left[\gamma\tau_1-\mathrm{i}\delta\frac{\partial}{\partial\sigma_2}\right]{}_e\langle\Gamma|
\end{aligned}
\tag{10.43}
$$

这是方程(10.32)中的第一个，同样的方法可以得到另外三个. 另一方面，应用对易关系 $\left[\dfrac{Q_1\pm Q_2}{\sqrt{2}}, \dfrac{P_1\pm P_2}{\sqrt{2}}\right]=\mathrm{i}$，则有，

$$
{}_e\langle\Gamma|\left[\frac{Q_1\pm Q_2}{\sqrt{2}}, \frac{P_1\pm P_2}{\sqrt{2}}\right]=\mathrm{i}(\beta\gamma-\delta\alpha){}_e\langle\Gamma| \tag{10.44}
$$

下面来讨论 $|\Gamma\rangle_e$ 的性质：

1）完备性

利用 IWOP 积分技术以及真空投影算符的正规乘积形式 $|00\rangle\langle 00| = :\exp[-a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2]:$ 计算下面的积分得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\beta^2\delta^2}\int \frac{d^2\sigma d^2\tau}{4\pi^2} |\Gamma\rangle_{ee}\langle\Gamma| \\
&= -\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}\int \frac{d^2\sigma d^2\tau}{\pi^2} :\exp\Big[\frac{\alpha|\sigma|^2}{\delta} + \sigma\alpha(a_1^\dagger - a_2) + \sigma^*\alpha(a_1 - a_2^\dagger) - \\
&a_1^\dagger a_1 - \frac{\gamma|\tau|^2}{\beta} + \tau\gamma(a_1^\dagger + a_2) + \tau^*\gamma(a_1 + a_2^\dagger) - (\beta\gamma + \alpha\delta)\times \\
&(a_1^\dagger a_2^\dagger + a_1 a_2) - a_2^\dagger a_2\Big]: \\
&= :\exp[-(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2)(\alpha\delta - \beta\gamma + 1)]: \\
&= 1
\end{aligned}
\tag{10.45}
$$

其中用到了积分公式(4.114)，可见$|\Gamma\rangle_e$满足表象的完备性关系.

2）非正交性

由 $|\Gamma\rangle_e$ 和相干态 $|z\rangle = \exp(-|z|^2/2 + za^\dagger)|0\rangle$ 的内积

$$
\begin{aligned}
&{}_e\langle\Gamma|z_1, z_2\rangle \\
&= 2\sqrt{-\alpha\beta\gamma\delta}\exp\Big[-\frac{|z_1|^2}{2} + \frac{\alpha|\sigma|^2}{2\delta} - \frac{\gamma|\tau|^2}{2\beta} + (\alpha\sigma^* + \gamma\tau^*)z_1\Big]\times \\
&\exp\Big[-\frac{|z_2|^2}{2} + (\gamma\tau - \alpha\sigma)z_2 - (\beta\gamma + \alpha\delta)z_1 z_2\Big]
\end{aligned}
\tag{10.46}
$$

以及 $\int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{\pi^2}|z_1, z_2\rangle\langle z_1, z_2| = 1$ 可得

$$
\begin{aligned}
{}_e\langle\Gamma|\Gamma'\rangle_e &= \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{\pi^2} {}_e\langle\Gamma|z_1, z_2\rangle\langle z_1, z_2|\Gamma'\rangle_e \\
&= \exp\Big[\frac{\alpha}{4\beta\gamma\delta}|\sigma - \sigma'|^2 - \frac{1}{4\beta\delta}(\tau'\sigma^* - \sigma\tau'^* + \sigma'\tau^* - \\
&\tau\sigma'^*) + \frac{\gamma}{4\alpha\beta\delta}|\tau - \tau'|^2 - \frac{\beta\gamma + \alpha\delta}{4\beta\delta}(\tau'\sigma'^* - \sigma'\tau'^* + \\
&\sigma\tau^* - \tau\sigma^*)\Big]
\end{aligned}
\tag{10.47}
$$

可以看到 ${}_{e}\langle\Gamma \mid \Gamma'\rangle_{e}$ 是非正交的，当且仅当 $\sigma=\sigma'$，$\tau=\tau'$ 时有 ${}_{e}\langle\Gamma \mid \Gamma\rangle_{e}=1$.

**3）测不准关系**

引入如下形式的正交相

$$Q_{\pm}=\frac{Q_1 \pm Q_2}{\sqrt{2}},\ P_{\pm}=\frac{P_1 \pm P_2}{\sqrt{2}},\ [Q_{\pm},\ P_{\pm}]=\mathrm{i} \quad (10.48)$$

利用内积，

$$\langle\eta \mid \Gamma\rangle_{e}=\sqrt{-\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}}\exp\left\{\frac{\delta\alpha}{2\beta\gamma}\left|\frac{\sigma}{\delta}+\eta\right|^{2}+\frac{1}{2\beta}[\tau(\eta^{*}-\alpha\sigma^{*})-\tau^{*}(\eta-\alpha\sigma)]\right\} \quad (10.49)$$

和

$$\langle\xi \mid \Gamma\rangle_{e}=\sqrt{-\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}}\exp\left\{\frac{\beta\gamma}{2\delta\alpha}\left|\frac{\tau}{\beta}-\xi\right|^{2}-\frac{1}{2\delta}[\sigma(\xi^{*}-\gamma\tau^{*})-\tau^{*}(\xi-\gamma\tau)]\right\} \quad (10.50)$$

及 $|\eta\rangle$ 表象的完备性则可以得到

$$\langle Q_{-}\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^{2}\eta}{\pi}\eta_{1}\,|\langle\eta \mid \Gamma\rangle_{e}|^{2}=-\frac{\sigma_{1}}{\delta}$$

$$\langle Q_{-}^{2}\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^{2}\eta}{\pi}\eta_{1}^{2}\,|\langle\eta \mid \Gamma\rangle_{e}|^{2}=\frac{\sigma_{1}^{2}}{\delta^{2}}-\frac{\beta\gamma}{2\delta\alpha} \quad (10.51)$$

同理，

$$\langle P_{-}\rangle=\frac{\tau_{2}}{\beta},\ \langle P_{-}^{2}\rangle=\frac{\tau_{2}^{2}}{\beta^{2}}-\frac{\delta\alpha}{2\beta\gamma} \quad (10.52)$$

所以有

$$\langle\Delta Q_{-}^{2}\rangle=\langle Q_{-}^{2}\rangle-\langle Q_{-}\rangle^{2}=-\frac{\beta\gamma}{2\delta\alpha}$$

$$\langle \Delta P_-^2 \rangle = \langle P_-^2 \rangle - \langle P_- \rangle^2 = -\frac{\delta\alpha}{2\beta\gamma} \tag{10.53}$$

就可以得到最小测不准原理

$$\sqrt{\langle \Delta Q_-^2 \rangle \langle \Delta P_-^2 \rangle} = \frac{1}{2} \tag{10.54}$$

以同样的方式有

$$\begin{aligned} \langle Q_+ \rangle &= \frac{\sigma_2}{\delta},\ \langle Q_+^2 \rangle = \frac{\sigma_2^2}{\delta^2} - \frac{\beta\gamma}{2\delta\alpha} \\ \langle P_+ \rangle &= \frac{\tau_1}{\beta},\ \langle P_+^2 \rangle = \frac{\tau_1^2}{\beta^2} - \frac{\delta\alpha}{2\beta\gamma} \end{aligned} \tag{10.55}$$

和

$$\sqrt{\langle \Delta Q_+^2 \rangle \langle \Delta P_+^2 \rangle} = \frac{1}{2} \tag{10.56}$$

综上所述，$|\Gamma\rangle_e$ 是使测不准关系取等号的态.

**4) $|\Gamma\rangle_{ee}\langle\Gamma|$ 的 Weyl 编序**

利用化算符 $\rho$ 为 Weyl 编序的积分公式(4.58)，可以计算 $|\Gamma\rangle_{ee}\langle\Gamma|$ 的 Weyl 编序形式为

$$|\Gamma\rangle_{ee}\langle\Gamma| = 4 \vdots \exp\left\{\frac{\delta\alpha}{\beta\gamma}\left(\frac{\sigma}{\delta} + (a_1 - a_2^\dagger)\right)\left(\frac{\sigma^*}{\delta} + (a_1^\dagger - a_2)\right) + \frac{\beta\gamma}{\delta\alpha}\left(\frac{\tau}{\beta} - (a_1 + a_2^\dagger)\right)\left(\frac{\tau^*}{\beta} - (a_1^\dagger + a_2)\right)\right\} \vdots \tag{10.57}$$

或者

$$|\Gamma\rangle_{ee}\langle\Gamma| = 4 \vdots \exp\left\{\frac{\delta\alpha}{\beta\gamma}\left[\left(\frac{\sigma_1}{\delta} + \frac{Q_1 - Q_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\delta} + \frac{P_1 + P_2}{\sqrt{2}}\right)^2\right] + \frac{\beta\gamma}{\delta\alpha}\left[\left(\frac{\tau_1}{\beta} - \frac{Q_1 + Q_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_2}{\beta} - \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\right\} \vdots \tag{10.58}$$

5) $|\Gamma\rangle_{ee}\langle\Gamma|$ 的边缘分布

将式(10.58)对 $d^2\sigma$ 做积分可得

$$\int\frac{d^2\sigma}{\pi}\mid\Gamma\rangle_{ee}\langle\Gamma\mid$$
$$=-4\frac{\beta\gamma\delta}{\alpha}\vdots\exp\left\{\frac{\beta\gamma}{\delta\alpha}\left[\left(\frac{\tau_1}{\beta}-\frac{Q_1+Q_2}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\tau_2}{\beta}-\frac{P_1-P_2}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\right\}\vdots \tag{10.59}$$

因为 $[Q_1+Q_2,P_1-P_2]=0$，在式(10.59)中不存在算符的任何排序问题，故可以将 Weyl 编序记号 $\vdots\ \vdots$ 直接去掉，所以得到

$$\int\frac{d^2\sigma}{\pi}|\Gamma\rangle_{ee}\langle\Gamma|$$
$$=-\frac{4\beta\gamma\delta}{\alpha}\exp\left\{\frac{\beta\gamma}{\delta\alpha}\left[\left(\frac{\tau_1}{\beta}-\frac{Q_1+Q_2}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\tau_2}{\beta}-\frac{P_1-P_2}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\right\} \tag{10.60}$$

那么函数 $|_e\langle\Gamma|\Psi\rangle|^2$ 在 $\xi$ 方向的边缘分布为

$$\langle\Psi\mid\int\frac{d^2\sigma}{\pi}\mid\Gamma\rangle_{ee}\langle\Gamma\mid\Psi\rangle$$
$$=\langle\Psi\mid\int\frac{d^2\xi}{\pi}\mid\xi\rangle\langle\xi\mid\int\frac{d^2\sigma}{\pi}\mid\Gamma\rangle_{ee}\langle\Gamma\mid\int\frac{d^2\xi'}{\pi}\mid\xi'\rangle\langle\xi'\mid\Psi\rangle$$
$$=-\frac{4\gamma\delta\beta}{\alpha}\int\frac{d^2\xi}{\pi}\mid\Psi(\xi)\mid^2\exp\left[\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}\left|\frac{\tau}{\beta}-\xi\right|^2\right] \tag{10.61}$$

这正是量子分布 $|\Psi(\xi)|^2$ 的高斯展宽形式. 同样地，做 $d^2\tau$ 的积分得到

$$\int\frac{d^2\tau}{\pi}\mid\Gamma\rangle_{ee}\langle\Gamma\mid$$
$$=-\frac{4\alpha\beta\delta}{\gamma}\exp\left\{\frac{\delta\alpha}{\beta\gamma}\left[\left(\frac{\sigma_1}{\delta}+\frac{Q_1-Q_2}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_2}{\delta}+\frac{P_1+P_2}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\right\} \tag{10.62}$$

那么$|_e\langle\Gamma|\Psi\rangle|^2$在$\eta$方向的边缘分布为

$$\begin{aligned}&\langle\Psi|\int\frac{d^2\tau}{\pi}|\Gamma\rangle_{ee}\langle\Gamma|\Psi\rangle\\&=-\frac{4\delta\alpha\beta}{\gamma}\int\frac{d^2\eta}{\pi}|\Psi(\eta)|^2\exp\left[\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}\left|\frac{\sigma}{\delta}+\eta\right|^2\right]\end{aligned}\tag{10.63}$$

它是几率分布$|\Psi(\eta)|^2$的高斯展宽. 式(10.61)和式(10.63)给出了$_e\langle\Gamma|$表象波函数与$|\xi\rangle(|\eta\rangle)$表象波函数的关系.

**6) $|\Gamma\rangle_{ee}\langle\Gamma|$作为广义的 Husimi 算符**

在前面章节已经得到两模 Wigner 算符的 Weyl 编序形式,

$$\begin{aligned}\Delta_w(\rho,\varsigma)=&\,\vdots\,\delta(a_1-a_2^\dagger-\rho)\delta(a_1^\dagger-a_2-\rho^*)\times\\&\delta(a_1+a_2^\dagger-\varsigma)\delta(a_1^\dagger+a_2-\varsigma^*)\,\vdots\end{aligned}\tag{10.64}$$

其中

$$\Delta_w(\rho,\varsigma)=\Delta_1(q_1,p_1)\otimes\Delta_2(q_2,p_2)\tag{10.65}$$

$$\rho=\bar{\alpha}-\bar{\beta}^*\ ,\quad \varsigma=\bar{\alpha}+\bar{\beta}^*\ ,\ \bar{\alpha}=(q_1+ip_1)/\sqrt{2}\ ,$$
$$\bar{\beta}=(q_2+ip_2)/\sqrt{2}$$

是纠缠形式的 Wigner 算符. 从式(10.64)看,对于两模纠缠系统的 Weyl 量子化方案,可以看作是做如下的变换得到的

$$\rho\to(a_1-a_2^\dagger)\ ,\quad \varsigma\to(a_1+a_2^\dagger)\tag{10.66}$$

那么从式(10.57)可以得到$|\Gamma\rangle_{ee}\langle\Gamma|$的经典 Weyl 对应函数为

$$4\exp\left\{\frac{\delta\alpha}{\beta\gamma}\left|\frac{\sigma}{\delta}+\rho\right|^2+\frac{\beta\gamma}{\delta\alpha}\left|\frac{\tau}{\beta}-\varsigma\right|^2\right\}\equiv h(\rho,\varsigma)\tag{10.67}$$

所以 Weyl 量子化规则可以写为

$$\begin{aligned}|\Gamma\rangle_{ee}\langle\Gamma|=&\,4\int d^2\rho d^2\zeta\,\vdots\,\delta(a_1-a_2^\dagger-\rho)\delta(a_1^\dagger-a_2-\rho^*)\delta(a_1+\\&a_2^\dagger-\varsigma)\delta(a_1^\dagger+a_2-\varsigma^*)\,\vdots\,\times\end{aligned}$$

$$\exp\left\{\frac{\delta\alpha}{\beta\gamma}\left|\frac{\sigma}{\delta}+\rho\right|^2+\frac{\beta\gamma}{\delta\alpha}\left|\frac{\tau}{\beta}-\varsigma\right|^2\right\}$$
$$=4\int d^2\rho d^2\varsigma\,\Delta_w(\rho,\varsigma)\exp\left\{\frac{\delta\alpha}{\beta\gamma}\left|\frac{\sigma}{\delta}+\rho\right|^2+\frac{\beta\gamma}{\delta\alpha}\left|\frac{\tau}{\beta}-\varsigma\right|^2\right\} \tag{10.68}$$

例如，当 $\beta=-\delta=1$，$\alpha=\frac{\kappa}{1+\kappa}$，$\gamma=\frac{1}{1+\kappa}$ 时，式(10.68)化为

$$|\Gamma\rangle_{ee}\langle\Gamma|\to 4\int d^2\rho d^2\varsigma\,\Delta_w(\rho,\varsigma)\exp\left[-\frac{1}{\kappa}|\rho-\sigma|^2-\kappa|\varsigma-\tau|^2\right] \tag{10.69}$$

这是单模 Husimi 算符的推广，所以式(10.68)是广义的两模 Husimi 算符(用高斯函数 $\exp\left(\frac{\delta\alpha}{\beta\gamma}\left|\frac{\sigma}{\delta}+\rho\right|^2+\frac{\beta\gamma}{\delta\alpha}\left|\frac{\tau}{\beta}-\varsigma\right|^2\right)$ 光滑 Wigner 函数得到的). 式(10.68)也可以看作是 Weyl 对应公式，高斯光滑函数就是密度算符 $|\Gamma\rangle_{ee}\langle\Gamma|$ 的经典 Weyl 对应. 下面给出验证，$\Delta_w(\rho,\varsigma)$ 的正规乘积形式为

$$\Delta_w(\rho,\varsigma)=\frac{1}{\pi^2}:\exp[-(a_1-a_2^\dagger-\rho)(a_1^\dagger-a_2-\rho^*)-(a_1+a_2^\dagger-\varsigma)(a_1^\dagger+a_2-\varsigma^*)]: \tag{10.70}$$

将式(10.70)代入到式(10.68)并积分得到

$$|\Gamma\rangle_{ee}\langle\Gamma|=-4\alpha\beta\gamma\delta:\exp\left\{\frac{\alpha}{\delta}[\sigma+\delta(a_1-a_2^\dagger)][\sigma^*+\delta(a_1^\dagger-a_2)]-\frac{\gamma}{\beta}[\tau-\beta(a_1+a_2^\dagger)][\tau^*-\beta(a_1^\dagger+a_2)]\right\}: \tag{10.71}$$

这和式(10.45)是一致的.

**7) $|\Gamma\rangle_e$ 的 Wigner 函数**

由双模 Wigner 算符在纠缠态表象中的表达式可知 $|\Gamma\rangle_e$ 的 Wigner 函数为

$$W(\rho,\varsigma)=\mathrm{Tr}[|\Gamma\rangle_{ee}\langle\Gamma|\Delta_w(\rho,\varsigma)]$$

$$= \int \frac{d^2\eta}{\pi^3} {}_e\langle \Gamma \mid \rho - \eta \rangle \langle \rho + \eta \mid \Gamma \rangle_e e^{\eta \varsigma^* - \eta^* \varsigma} \tag{10.72}$$

将式(10.49)代入式(10.72)并积分得

$$W(\rho, \varsigma)$$

$$= -\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}\int \frac{d^2\eta}{\pi^3}\exp\left\{\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma} \mid \eta \mid^2 + \left(\varsigma^* - \frac{\tau^*}{\beta}\right)\eta + \left(\frac{\tau}{\beta} - \varsigma\right)\eta^* + \frac{\alpha}{2\beta\gamma\delta}\left[2 \mid \sigma \mid^2 + 2\delta^2 \mid \rho \mid^2 + 2\delta(\sigma\rho^* + \rho\sigma^*)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\exp\left[\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}\left|\frac{\sigma}{\delta} + \rho\right|^2 + \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}\left|\frac{\tau}{\beta} - \varsigma\right|^2\right] \tag{10.73}$$

与式(10.68)比较,可以看出,$|\Gamma\rangle_e$ 的 Wigner 函数恰好是高斯光滑函数的$(2\pi)^2$,这是对投影算符$|\Gamma\rangle_{ee}\langle\Gamma|$的另一种解释.可以计算,式(10.73)的在 $\sigma$ 方向的边缘分布为 $\exp\left(\frac{\delta\alpha}{\beta\gamma}\left|\frac{\sigma}{\delta}+\rho\right|^2\right)$,在 $\tau$ 方向的边缘分布为 $\exp\left(\frac{\beta\gamma}{\delta\alpha}\left|\frac{\tau}{\beta}-\varsigma\right|^2\right)$,当 $\beta\gamma+\delta\alpha=0$, $\beta=-\delta=1$ 时,式(10.73)给出两模正则相干态的 Wigner 函数,即

$$W(\rho, \varsigma) = \frac{1}{\pi^2}\exp(-\mid \sigma + \rho \mid^2 - \mid \tau - \varsigma \mid^2) \tag{10.74}$$

## 10.3 Wigner 函数随时间的演化

下面来看当给定两体纠缠系统的哈密顿量时(势依赖于两粒子的相对距离),

$$H = \frac{P_1^2}{2m_1} + \frac{P_2^2}{2m_2} + U(Q_1 - Q_2) \tag{10.75}$$

Wigner 函数将如何随时间演化[3]?

引入约化质量和总重量

$$M = m_1 + m_2, \mu = \frac{m_1 m_2}{M}, P_r = \mu_2 P_1 - \mu_1 P_2,$$

$$q_r = Q_1 - Q_2, \mu_i = \frac{m_i}{M} \tag{10.76}$$

所以式(10.75)变为

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{P_r^2}{2\mu} + U(q_r), P = P_1 + P_2 \tag{10.77}$$

由海森堡方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = -\mathrm{i}[H, \rho], (\hbar = 1) \tag{10.78}$$

给出

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\langle \sigma + \eta \mid \rho \mid \sigma - \eta \rangle \\
&= -\mathrm{i}\langle \sigma + \eta \mid \left[\frac{P^2}{2M} + \frac{P_r^2}{2\mu} + U(q_r)\right]\rho \mid \sigma - \eta \rangle + \\
&\quad \mathrm{i}\langle \sigma + \eta \mid \rho\left[\frac{P^2}{2M} + \frac{P_r^2}{2\mu} + U(q_r)\right] \mid \sigma - \eta \rangle
\end{aligned} \tag{10.79}$$

想要化简式(10.79)，必须先求出$\langle \eta \mid P_r$，所以借助于$\mid \eta \rangle$的 Schmidt 分解形式和$\mu_1 + \mu_2 = 1$立即得到

$$\begin{aligned}
P_r \mid \eta \rangle &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta_1\eta_2}\int \mathrm{d}p[\mu_2(p + \sqrt{2}\eta_2) + \mu_1 p] \\
&\quad \mid p + \sqrt{2}\eta_2\rangle_1 \otimes \mid -p\rangle_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\eta_1 p} \\
&= \left[\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial(\sqrt{2}\eta_1)} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\mu_1 - \mu_2)\eta_2\right] \mid \eta \rangle
\end{aligned} \tag{10.80}$$

由式(10.80)和$\mid \eta \rangle$态的本征方程得到

$$\langle\sigma+\eta|\frac{P^2}{2M}=\frac{(\sigma_2+\eta_2)^2}{M}\langle\sigma+\eta|$$

$$\langle\sigma+\eta|\frac{P_r^2}{2\mu}=\frac{1}{4\mu}\left[\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial(\sigma_1+\eta_1)}+(\mu_1-\mu_2)(\sigma_2+\eta_2)^2\right]\langle\sigma+\eta| \tag{10.81}$$

另一方面，由 $\sigma+\eta=\tau$，$\sigma-\eta=\lambda$ 导出 $\frac{\partial}{\partial(\sigma_1\pm\eta_1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma_1}\pm\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)$，再根据式(10.80)、(10.81)，式(10.79)将变为

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\langle\sigma+\eta|\rho|\sigma-\eta\rangle\\&=\left\{\frac{4\sigma_2\eta_2}{M}+\frac{\sigma_2\eta_2}{\mu}(\mu_1-\mu_2)^2-\frac{1}{4\mu}\frac{\partial}{\partial\sigma_1}\frac{\partial}{\partial\eta_1}+\right.\\&\quad\frac{\mathrm{i}(\mu_1-\mu_2)}{2\mu}\left(\sigma_2\frac{\partial}{\partial\sigma_1}+\eta_2\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)+U[\sqrt{2}(\sigma_1+\eta_1)]-\\&\quad\left.U[\sqrt{2}(\sigma_1-\eta_1)]\right\}\langle\sigma+\eta|\rho|\sigma-\eta\rangle\end{aligned} \tag{10.82}$$

其中

$$\frac{4}{M}+\frac{1}{\mu}(\mu_1-\mu_2)^2=\frac{1}{\mu}$$

$$\begin{aligned}&U[\sqrt{2}(\sigma_1+\eta_1)]-U[\sqrt{2}(\sigma_1-\eta_1)]\\&=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\frac{\partial^{2k+1}U(\sqrt{2}\sigma_1)}{\partial(\sqrt{2}\sigma_1)^{2k+1}}(\sqrt{2}\eta_1)^{2k+1}\\&\equiv A\end{aligned} \tag{10.83}$$

将式(10.82)和式(10.83)代入到

$$\frac{\partial}{\partial t}W_\rho(\sigma,\gamma,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi^3}\langle\sigma+\eta|\rho|\sigma-\eta\rangle\mathrm{e}^{\eta\gamma^*-\gamma\eta^*} \tag{10.84}$$

并做积分给出

$$
\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}W_{\rho}(\sigma,\gamma)
$$

$$
=\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi^3}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\eta_2\gamma_1-\eta_1\gamma_2)}\left\{\frac{\sigma_2\eta_2}{\mu}-\frac{1}{4\mu}\frac{\partial}{\partial\sigma_1}\frac{\partial}{\partial\eta_1}+\frac{\mathrm{i}(\mu_1-\mu_2)}{2\mu}\times\right.
$$

$$
\left.\left(\sigma_2\frac{\partial}{\partial\sigma_1}+\eta_2\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)+A\right\}\langle\sigma+\eta\mid\rho\mid\sigma-\eta\rangle
$$

$$
=\left\{-\frac{\mathrm{i}}{2\mu}\sigma_2\frac{\partial}{\partial\gamma_1}-\frac{\mathrm{i}\gamma_2}{2\mu}\frac{\partial}{\partial\sigma_1}+\frac{\mathrm{i}(\mu_1-\mu_2)}{2\mu}\left(\sigma_2\frac{\partial}{\partial\sigma_1}+\gamma_2\frac{\partial}{\partial\gamma_1}\right)+\right.
$$

$$
\left.2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\frac{\partial^{2k+1}U[\sqrt{2}\sigma_1]}{\partial(\sqrt{2}\sigma_1)^{2k+1}}\left(\frac{\mathrm{i}\partial}{\partial(\sqrt{2}\gamma_2)}\right)^{2k+1}\right\}\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi_3}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\eta_2\gamma_1-\eta_1\gamma_2)}\times
$$

$$
\langle\sigma+\eta\mid\rho\mid\sigma-\eta\rangle. \tag{10.85}
$$

值得注意的是，要讨论纠缠 Wigner 函数时间演化方程的经典极限，方程(10.83)需写为

$$
A=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hbar^{2k+1}}{(2k+1)!}\frac{\partial^{2k+1}U(\sqrt{2}\sigma_1)}{\partial(\sqrt{2}\sigma_1)^{2k+1}}\left(\frac{\sqrt{2}\eta_1}{\hbar}\right)^{2k+1} \tag{10.86}
$$

同时式(10.85)中的 $\exp[2\mathrm{i}(\eta_2\gamma_1-\gamma_2\eta_1)]$要改写为$\exp[2\mathrm{i}(\eta_2\gamma_1-\gamma_2\eta_1)/\hbar]$，所以时间演化方程为

$$
\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2\mu}[\sigma_2-(\mu_1-\mu_2)\gamma_2]\frac{\partial}{\partial\gamma_1}+\frac{1}{2\mu}[\gamma_2-(\mu_1-\mu_2)\sigma_2]\times\right.
$$

$$
\left.\frac{\partial}{\partial\sigma_1}-2\frac{\partial U(\sqrt{2}\sigma_1)}{\partial(\sqrt{2}\sigma_1)}\frac{\partial}{\partial(\sqrt{2}\gamma_2)}\right\}W_{\rho}(\sigma,\gamma,t)
$$

$$
=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{\partial^{2k+1}U(\sqrt{2}\sigma_1)}{\partial(\sqrt{2}\sigma_1)^{2k+1}}\left(\frac{\partial}{\partial(\sqrt{2}\gamma_2)}\right)^{2k+1}W_{\rho}(\sigma,\gamma,t) \tag{10.87}
$$

为了使式(10.87)的意义更清晰，注意到

$$\gamma = \alpha + \beta^* = \gamma_1 + \mathrm{i}\gamma_2, \ \gamma_1 = \frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}}, \ \gamma_2 = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{2}}$$

$$\sigma = \alpha - \beta^* = \sigma_1 + \mathrm{i}\sigma_2, \ \sigma_1 = \frac{q_1 - q_2}{\sqrt{2}}, \ \sigma_2 = \frac{p_1 + p_2}{\sqrt{2}} \tag{10.88}$$

所以

$$\frac{1}{2\mu}[\sigma_2 - (\mu_1 - \mu_2)\gamma_2] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{p_1}{m_1} + \frac{p_2}{m_2}\right)$$

$$\frac{1}{2\mu}[\gamma_2 - (\mu_1 - \mu_2)\sigma_2] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{p_1}{m_1} - \frac{p_2}{m_2}\right) \tag{10.89}$$

所以式(10.87)变为

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{p_1}{m_1} + \frac{p_2}{m_2}\right)\frac{\partial}{\partial \gamma_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{p_1}{m_1} - \frac{p_2}{m_2}\right)\frac{\partial}{\partial \sigma_1} - \right.$$

$$\left. 2\frac{\partial U(\sqrt{2}\sigma_1)}{\partial(\sqrt{2}\sigma_1)}\frac{\partial}{\partial(\sqrt{2}\gamma_2)}\right\} W_\rho(\sigma, \gamma, t)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{\partial^{2k+1}U(\sqrt{2}\sigma_1)}{\partial(\sqrt{2}\sigma_1)^{2k+1}}\left(\frac{\partial}{\partial(\sqrt{2}\gamma_2)}\right)^{2k+1} W_\rho(\sigma, \gamma, t) \tag{10.90}$$

对比由单粒子哈密顿算符 $H_1 = \frac{P_1}{2m} + V(Q_1)$ 决定的 Wigner 函数的时间演化方程

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_1}{m}\frac{\partial}{\partial q_1} - \frac{\mathrm{d}V(q_1)}{\mathrm{d}q_1}\frac{\partial}{\partial p_1}\right\} W(q, p, t)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{2k}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{\mathrm{d}^{2k+1}V(q_1)}{\mathrm{d}q_1^{2k+1}}\left(\frac{\partial}{\partial p_1}\right)^{2k+1} W(q, p, t) \tag{10.91}$$

可见它们是类似的. 可以看出,式(10.90)是由 $\frac{1}{\sqrt{2}}(q_1+q_2)$,$\frac{1}{\sqrt{2}}(q_1-q_2)$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2}}(p_1-p_2)$ 表达的,分别对应中心质量坐标、相对坐标和相对动量,这正是我们所期待的.

## 参考文献

[1] Hu Liyun, Fan Hongyi, Lu Hailiang. Explicit state vector for Torres-Vega-Frederick phase space representation and its statistical behavior [J]. J. Chem. Phys., 2008,128:054101.
[2] Hu Liyun, Fan Hongyi. Entangled state for constructing a generalized phase-space representation and its statistical behavior [J]. Phys. Rev. A, 2009,80:022115.
[3] Fan Hongyi. Time evolution of the Wigner function in the entangled-state representation [J]. Phys. Rev. A, 2002,65:064102.

# 第 11 章　s-编序算符内的积分技术(IWSOP)

Cahill-Glauber 曾在研究量子光学理论时对密度算符引进了带 $s$-参数的相空间分布函数，即当 $s=-1, 0, 1$ 时，它分别退化到 Q 表示，P 表示和 Wigner 函数.

在量子相空间，我们通过引入 $s$ 参数化的 Wigner 算符，发明了 $s$-编序算符内的积分技术，它综合了正规编序、反正规编序和 Weyl 编序，即当 $s=-1, 0, 1$ 时，$s$-编序算符内的积分技术分别退化到反正规、Weyl、正规乘积内的积分技术. 同时也导出了密度算符的 $s$-编序展开公式，完善了带 $s$ 参数的量子化方案，丰富了量子相空间理论.（注意本章所叙与第 5 章 5.8 节的区别.）

## 11.1　带 s 参数的 Wigner 算符及相应的 Weyl 对应规则[1]

通过对比已有的 Wigner 算符，我们定义一个更普遍的带 $s$ 参数的 Wigner 算符，其形式如下

$$\Delta_s(a)=\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{2\pi^2}\exp\left\{\frac{s\,|\beta|^2}{2}+\beta a^{\dagger}-\beta^* a-\beta\alpha^*+\beta^*\alpha\right\} \tag{11.1}$$

利用 Baker-Hausdorff 公式和 IWOP(正规乘积编序)积分技术，对于 $s>1$，得到式(11.1)的正规乘积形式

$$\Delta_s(a)=\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{2\pi^2}:\exp\left\{\frac{-(1-s)\,|\beta|^2}{2}+\beta a^{\dagger}-\beta^* a-\beta\alpha^*+\beta^*\alpha\right\}:$$

$$= \frac{1}{(1-s)\pi} : \exp\left\{\frac{-2}{1-s}(a^\dagger - \alpha^*)(a-\alpha)\right\}: \tag{11.2}$$

当 $s=0$ 时，方程(11.2)变为一般的 Wigner 算符(4.12)，对于 $s < -1$，也可以得到式(11.1)的反正规乘积形式

$$\Delta_s(\alpha) = \int \frac{d^2\beta}{2\pi^2} \vdots \exp\left\{\frac{-(-1-s)|\beta|^2}{2} + \beta a^\dagger - \beta^* a - \beta\alpha^* + \beta^*\alpha\right\} \vdots$$

$$= \frac{1}{(-1-s)\pi} \vdots \exp\left\{\frac{2}{1+s}(a^\dagger - \alpha^*)(a-\alpha)\right\} \vdots \tag{11.3}$$

根据 Delta 函数的定义

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}} \tag{11.4}$$

则对于 $s=-1$，可以得到

$$\Delta_{s=-1}(\alpha) = \vdots \delta(a^\dagger - \alpha^*)\delta(a-\alpha) \vdots$$
$$= \delta(a-\alpha)\delta(a^\dagger - \alpha^*) = |\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{11.5}$$

$|\alpha\rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \alpha a^\dagger\right\}|0\rangle$ 是相干态. 利用算符公式(2.41)，则式(11.2)变为

$$\Delta_s(\alpha) = \frac{1}{(1-s)\pi} e^{\frac{2}{1-s}\alpha a^\dagger} : \exp\left\{\left(\frac{s+1}{s-1} - 1\right)a^\dagger a\right\}: e^{\frac{2}{1-s}\alpha^* a - \frac{2}{1-s}|\alpha|^2}$$

$$= \frac{1}{(1-s)\pi} e^{\frac{2}{1-s}\alpha a^\dagger} e^{a^\dagger a \ln\frac{s+1}{s-1}} e^{\frac{2}{1-s}\alpha^* a - \frac{2}{1-s}|\alpha|^2} \tag{11.6}$$

从方程(11.2)也可以看出

$$2\int d^2\alpha \Delta_s(\alpha) = \frac{2}{(1-s)\pi}\int d^2\alpha : \exp\left\{\frac{-2}{(1-s)}(a^\dagger - \alpha^*)(a-\alpha)\right\}:$$
$$= 1 \tag{11.7}$$

$\Delta_s(\alpha)$是完备的，所以密度算符可以展开为

$$\rho = 2\int \mathrm{d}^2\alpha \Delta_s(\alpha^*, \alpha)\, \mathfrak{I}(\alpha, s) \tag{11.8}$$

这是一个新的经典-量子对应公式，当 $s = 0$ 时，给出 Weyl 对应. 注意到 $\Delta_{-s}(\alpha')$的形式并且利用相干态表象的完备性 $\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} \mid z\rangle\langle z \mid = 1$，计算

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}[\Delta_{-s}(\alpha')\Delta_s(\alpha)] \\
&= G\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\langle z \mid \mathrm{e}^{\frac{2}{1+s}\alpha' a^\dagger} \mathrm{e}^{a^\dagger a \ln\frac{s-1}{s+1}} \mathrm{e}^{\frac{2}{1+s}\alpha'^* a} \mathrm{e}^{\frac{2}{1-s}\alpha a^\dagger} \mathrm{e}^{a^\dagger a \ln\frac{s+1}{s-1}} \mathrm{e}^{\frac{2}{1-s}\alpha^* a} \mid z\rangle \\
&= G\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\langle z \mid \mathrm{e}^{\frac{2}{1+s}\alpha' a^\dagger} \mathrm{e}^{\frac{-2}{1-s}\alpha'^* a} \mathrm{e}^{\frac{-2}{1+s}\alpha a^\dagger} \mathrm{e}^{\frac{2}{1-s}\alpha^* a} \mid z\rangle \\
&= G\exp\left[\frac{4\alpha'^* a}{(1+s)(1-s)}\right]\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\exp\left[\frac{2z^*}{1+s}(\alpha' - \alpha) - \right. \\
&\quad \left. \frac{2z}{1-s}(\alpha'^* - \alpha^*)\right] \\
&= \frac{1}{4\pi}\delta(\alpha' - \alpha)(\alpha'^* - \alpha^*)\exp\left\{-\left(\frac{2}{1-s} + \frac{2}{1+s}\right)\mid \alpha \mid^2 - \right. \\
&\quad \left. \frac{4\alpha'^* a}{(1+s)(s-1)}\right\} \\
&= \frac{1}{4\pi}\delta(\alpha' - \alpha)(\alpha'^* - \alpha^*) \\
&= \frac{1}{2\pi}\delta(q' - q)(p' - p),\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + \mathrm{i}p),
\end{aligned} \tag{11.9}$$

其中定义了 $G \equiv \frac{\mathrm{e}^{-\frac{2}{1-s}|\alpha|^2 - \frac{2}{1+s}|\alpha'|^2}}{(1+s)(1-s)\pi^2}$. 根据式(11.9)可知，带 $s$ 参数的量子化方案给出密度算符 $\rho$ 的经典对应函数是

$$\begin{aligned}
2\pi\mathrm{Tr}[\Delta_{-s}(\alpha)\rho] &= 4\pi\int \mathrm{d}^2\alpha' \mathrm{Tr}[\Delta_{-s}(\alpha)\Delta_s(\alpha')]\, \mathfrak{I}(\alpha', s) \\
&= \int \mathrm{d}^2\alpha' \delta(\alpha - \alpha')\delta(\alpha^* - \alpha'^*)\, \mathfrak{I}(\alpha', s) = \mathfrak{I}(\alpha, s)
\end{aligned} \tag{11.10}$$

式(11.8)和式(11.10)就是带参数 $s$ 的量子化方案,它给出了经典函数和量子力学算符的一一对应,Weyl 对应方案是其中的一个特例.

## 11.2 密度矩阵的 $s$ -编序展开

在给出密度矩阵的 $s$ -编序展开之前,先求 $|z\rangle\langle z|$ 的 $s$ -编序形式,并给出 $s$ -编序算符内的积分技术.

当 $\rho = |z\rangle\langle z|$,根据式(11.10)可以得到

$$
\begin{aligned}
2\pi \mathrm{Tr}[\Delta_{-s}(\alpha)|z\rangle\langle z|] &= \frac{2}{1+s}\langle z|\colon \exp\left\{\frac{-2}{1+s}(a^{\dagger}-\alpha^{*})(a-\alpha)\right\}\colon|z\rangle \\
&= \frac{2}{1+s}\exp\left\{\frac{-2}{1+s}(z^{*}-\alpha^{*})(z-\alpha)\right\}
\end{aligned} \tag{11.11}
$$

这就是 $|z\rangle\langle z|$ 的带 $s$ 参数的经典对应. 对于带 $s$ 参数的分布,定义 $|z\rangle\langle z|$ 的 $s$ -编序形式为

$$
|z\rangle\langle z| = \frac{2}{1+s}\Theta\exp\left\{\frac{-2}{1+s}(z^{*}-a^{\dagger})(z-a)\right\}\Theta \tag{11.12}
$$

其中 $\Theta\cdots\Theta$ 是 $s$-编序记号,这个定义与以前已知的 $|z\rangle\langle z|$ 的编序公式是一致的. 当 $s=0$ 时,$\Theta\cdots\Theta$ 变为 Weyl 编序 $\vdots\ \vdots$,式(11.12)就化为

$$
|z\rangle\langle z| = 2\,\vdots\exp\{-2(z^{*}-a^{\dagger})(z-a)\}\vdots \tag{11.13}
$$

当 $s=1$ 时,$\Theta\cdots\Theta$ 变为正规乘积编序,式(11.12)变成

$$
|z\rangle\langle z| = \colon\exp\{-2(z^{*}-a^{\dagger})(z-a)\}\colon \tag{11.14}
$$

当 $s=-1$ 时,$\Theta\cdots\Theta$ 就变为反正规乘积编序,式(11.12)化为

$$
|z\rangle\langle z| = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2}{\varepsilon}\,\vdots\exp\left\{\frac{2}{\varepsilon}(z^{*}-a^{\dagger})(z-a)\right\}\vdots
$$

$$= \vdots \delta(z^* - a^\dagger)\delta(z - a) \vdots \tag{11.15}$$

基于以上讨论，给出带 $s$ 参数的有序算符内的积分技术(IWSOP)的性质：

(1) 在记号 $\Theta\cdots\Theta$ 内的玻色算符 $a$ 和 $a^\dagger$ 的顺序是可交换的.

(2) $c$ 数可以从 $\Theta\cdots\Theta$ 记号内拿出.

(3) 可以对在 $s$-编序内的算符函数中含的 $c$ 数进行积分或微分运算.

(4) 真空投影算符 $|0\rangle\langle 0|$ 的 $s$-编序形式是

$$|0\rangle\langle 0| = \frac{2}{1+s}\Theta\exp\left\{\frac{-2}{1+s}a^\dagger a\right\}\Theta \tag{11.16}$$

(5) 当 $s=1$ 时，$\Theta\cdots\Theta$ 变为 $:\ :$；当 $s=0$ 时，变为 $\colon\!\colon\ \colon\!\colon$；当 $s=-1$ 时，变为 $\vdots\ \ \vdots$.

根据式(11.12)和 P 表示式(4.52)有

$$\rho = \int \frac{d^2 z}{\pi} P(z)|z\rangle\langle z|$$
$$= \frac{2}{1+s}\int \frac{d^2 z}{\pi} P(z)\Theta\exp\left\{\frac{-2}{1+s}(z^* - a^\dagger)(z-a)\right\}\Theta \tag{11.17}$$

将相干态的内积 $\langle -\beta | \beta\rangle = e^{-2|\beta|^2}$ 以及 Mehta 公式(4.53)代入式(11.17)得到

$$\rho = \frac{2}{1+s}\int \frac{d^2\beta}{\pi}\langle -\beta | \rho | \beta\rangle e^{|\beta|^2}\int \frac{d^2 z}{\pi}$$
$$\Theta\exp\left\{|z|^2 + \beta^* z - \beta z^* - \frac{2}{1+s}(z^* - a^\dagger)(z-a)\right\}\Theta$$
$$= \frac{2}{1-s}\int \frac{d^2\beta}{\pi}\langle -\beta | \rho | \beta\rangle$$
$$\Theta\exp\left\{\frac{2}{s-1}(s|\beta|^2 - \beta^* a + \beta a^\dagger - a^\dagger a)\right\}\Theta \tag{11.18}$$

这就是将算符化为 $s$ -编序形式的展开公式. 可以看出,当 $s=0$ 时,式(11.18)化为(4.58);当 $s=-1$ 时,式(11.18)变为(5.71).

作为应用,求算符 $e^{\lambda a^\dagger a}$ 的 $s$ -编序形式. 利用公式(2.41)和 IWSOP 技术,得到一个新的算符公式:

$$
\begin{aligned}
e^{\lambda a^\dagger a} &= \frac{2}{1-s}\int \frac{d^2\beta}{\pi}\Theta\langle -\beta \mid \exp[(1-e^\lambda)a^\dagger a] \mid \beta\rangle \times \\
&\quad \exp\left[-\frac{2}{1-s}(s\mid\beta\mid^2-\beta^* a+\beta a^\dagger-a^\dagger a)\right]\Theta \\
&= \frac{2}{1-s}\int \frac{d^2\beta}{\pi}\Theta\exp\left[-(1-e^\lambda)\mid\beta\mid^2-\right. \\
&\quad \left.\frac{2}{1-s}(s\mid\beta\mid^2-\beta^* a+\beta a^\dagger-a^\dagger a)\right]\Theta \\
&= \frac{2}{1+s-se^\lambda+e^\lambda}\Theta\exp\left[\frac{2(e^\lambda-1)}{1+s-se^\lambda+e^\lambda}a^\dagger a\right]\Theta
\end{aligned}
\tag{11.19}
$$

当 $\lambda=i\pi$ 时,有

$$
e^{i\pi a^\dagger a} = \frac{1}{s}\Theta\exp\left\{\frac{-2}{s}a^\dagger a\right\}\Theta \tag{11.20}
$$

同时也可以看到,当 $s=1$ 时,式(11.19) 变为式(2.41);当 $s=0$ 时,由式(11.19)得到

$$
e^{\lambda a^\dagger a} = \frac{2}{1+e^\lambda}\vdots\exp\left\{\frac{2(e^\lambda-1)}{1+e^\lambda}aa^\dagger\right\}\vdots \tag{11.21}
$$

对于 $s=-1$, 式(11.19)给出

$$
e^{\lambda a^\dagger a} = e^{-\lambda}\vdots\exp\{1-e^{-\lambda}aa^\dagger\}\vdots \tag{11.22}
$$

这些与已知的结果都是一致的.

## 11.3 $\Delta_s(\alpha^*, \alpha)$的 $s$ -编序展开

下面计算 $\Delta_s(\alpha^*, \alpha)$的 $s$ -编序展开形式,由式(11.2)和式

(11.18)得到

$$\Delta_s(\alpha^*,\alpha)=\frac{2}{\pi(1-s)^2}\int\frac{d^2\beta}{\pi}\langle-\beta|:\exp\left[\frac{-2}{1-s}(a^\dagger-\alpha^*)(a-\alpha)\right]:$$

$$|\beta\rangle\times\Theta\exp\left[-\frac{2}{1-s}(s|\beta|^2-\beta^*a+\beta a^\dagger-a^\dagger a)\right]\Theta$$

$$=\frac{2}{(1-s)^2}\Theta\delta\left[-\frac{2}{1-s}(a^\dagger-\alpha^*)\right]\delta\left[-\frac{2}{1-s}(a-\alpha)\right]\Theta$$

$$=\frac{1}{2}\Theta\delta(a^\dagger-\alpha^*)\delta(a-\alpha)\Theta \tag{11.23}$$

类似地,当 $s=0$ 时给出

$$\Delta(\alpha)=\frac{1}{2}\vdots\delta(\alpha^*-a^\dagger)\delta(\alpha-a)\vdots \tag{11.24}$$

此即通常的 Wigner 算符的 Weyl 编序形式.

## 11.4 算符 $s$-编序的本质[2]

这一节将给出算符 $s$-编序的本质. Cahill - Glauber 在 1969 年给出了算符的带 $s$ 参数的编序规则,即 $s=1,0,-1$ 分别对应正规编序、Weyl 编序和反正规编序. Cahill 和 Glauber 也试图通过下式来定义 $s$-编序的展开公式,即

$$\{a^{\dagger n}a^m\}_s=\left.\frac{\partial^{n+m}D(\alpha,s)}{\partial\alpha^n\partial(-\alpha^*)^m}\right|_{\alpha=0} \tag{11.25}$$

其中

$$D(\alpha,s)=D(\alpha)e^{s|\alpha|^2},\ D(\alpha)=\exp[\alpha a^\dagger-\alpha^*a],\ [a,a^\dagger]=1 \tag{11.26}$$

那么 $s$-编序的规则到底把 $a^{\dagger m}a^n$ 变成了什么呢? 所以仅知道式(11.25)是不够的. 以下用带 $s$ 参数的有序算符内的积分规则来解决此问题.

将 $\rho=a^{\dagger m}a^n$ 代入到公式(11.18),并利用积分公式(2.93)

可得到

$$
\begin{aligned}
a^{\dagger m}a^{n} &= \frac{2(-1)^{m}}{1-s}\int\frac{\mathrm{d}^{2}\beta}{\pi}\beta^{*m}\beta^{n}\Theta\exp\Big[-\frac{2}{1-s}(|\beta|^{2}-\beta^{*}a+\\
&\quad \beta a^{\dagger}-a^{\dagger}a)\Big]\Theta\\
&=(-1)^{m}\left(\frac{1-s}{2}\right)^{(n+m)/2}\int\frac{\mathrm{d}^{2}\beta'}{\pi}\beta'^{*m}\beta'^{n}\times\Theta\exp\Big[-|\beta'|^{2}-\\
&\quad \beta'\sqrt{\frac{2}{1-s}}a^{\dagger}+\beta'^{*}\sqrt{\frac{2}{1-s}}a-\frac{2}{s-1}a^{\dagger}a\Big]\Theta\\
&=\left(\frac{1-s}{2}\right)^{(n+m)/2}\Theta\mathrm{H}_{m,n}\left(\sqrt{\frac{2}{1-s}}a^{\dagger},\sqrt{\frac{2}{1-s}}a\right)\Theta
\end{aligned}
\tag{11.27}
$$

这就是算符 $s$ 参数量子化方案的本质.所以算符 $a^{\dagger m}a^{n}$ 在 $s$ 参数量子化方案下的经典对应为

$$
\left(\frac{1-s}{2}\right)^{\frac{n+m}{2}}\mathrm{H}_{m,n}\left(\sqrt{\frac{2}{1-s}}\alpha^{*},\sqrt{\frac{2}{1-s}}\alpha\right)\rightarrow a^{\dagger m}a^{n}
\tag{11.28}
$$

当 $s=0$ 时,式(11.28)变为 Weyl 编序,

$$
\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+m}{2}}\vdots\,\mathrm{H}_{m,n}(\sqrt{2}a^{\dagger},\sqrt{2}a)\,\vdots=a^{\dagger m}a^{n}
\tag{11.29}
$$

当 $s=-1$ 时,则化为反正规编序,

$$
\vdots\,\mathrm{H}_{m,n}(a^{\dagger},a)\,\vdots=a^{\dagger m}a^{n}
\tag{11.30}
$$

这与我们已知的结果是一致的.

## 11.5 $\Theta a^{\dagger m}a^{n}\Theta$ 的正规编序

根据式(11.2)、(11.23)和

$$
\Theta\,\mathfrak{I}(a^{\dagger},a)\Theta=2\int\mathrm{d}^{2}\alpha\Delta_{s}(\alpha)\,\mathfrak{I}(\alpha)
\tag{11.31}
$$

以及 IWOP 积分技术和积分公式(2.93)，可得 $\rho = \Theta a^{\dagger m} a^n \Theta$ 的正规乘积编序

$$\Theta a^{\dagger m} a^n \Theta = \int \mathrm{d}^2 \alpha \Theta \alpha^{*m} \alpha^n \delta(a^\dagger - \alpha^*) \delta(a - \alpha) \Theta$$

$$= \frac{2}{1-s} \int \frac{\mathrm{d}^2 \alpha}{\pi} \alpha^{*m} \alpha^n : \exp\left[ -\frac{2|\alpha|^2}{1-s} + \frac{2}{1-s}(\alpha^* a + \alpha a^\dagger) - \frac{2a^\dagger a}{1-s} \right] :$$

$$= \left(\frac{1-s}{2}\right)^{(n+m)/2} \int \frac{\mathrm{d}^2 \alpha'}{\pi} \alpha'^{*m} \alpha'^n : \exp\left[ -|\alpha'|^2 + \sqrt{\frac{2}{1-s}}(\alpha'^* a + \alpha' a^\dagger) - \frac{2a^\dagger a}{1-s} \right] :$$

$$= (-\mathrm{i})^{(n+m)} \left(\frac{1-s}{2}\right)^{(n+m)/2} : \mathrm{H}_{m,n}\left( \mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{1-s}} a^\dagger, \mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{1-s}} a \right) : \tag{11.32}$$

式(11.27)和式(11.32)是对 $s$ 参数量子化规则的补充和完善. 所以，利用式(11.32)、(11.23)和(11.31)，$\alpha^n \alpha^{*m}$ 被量子化为

$$\alpha^n \alpha^{*m} \to (-\mathrm{i})^{m+n} \left(\frac{1-s}{2}\right)^{\frac{n+m}{2}} : \mathrm{H}_{m,n}\left( \mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{1-s}} a^\dagger, \mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{1-s}} a \right) : \tag{11.33}$$

再根据厄米多项式和拉盖尔多项式的关系(6.22)，对于 $m < n$，式(11.32)变为

$$\Theta a^{\dagger m} a^n \Theta = \left(\frac{1-s}{2}\right)^m m! : \mathrm{L}_m^{(n-m)}\left(\frac{2a^\dagger a}{s-1}\right) : a^{n-m} \tag{11.34}$$

$m > n$ 时则变为

$$\Theta a^{\dagger m} a^n \Theta = \left(\frac{1-s}{2}\right)^n n! a^{\dagger n-m} : \mathrm{L}_n^{(m-n)}\left(\frac{2a^\dagger a}{s-1}\right) : \tag{11.35}$$

## 11.6 $\Theta a^{\dagger m}a^n\Theta$ 的 $s'$-编序展开

设有一个 $s$-编序的算符，那么它如何化为 $s'$-编序的算符呢？下面给出详细介绍. 由式(11.18)和式(11.32)以及 IWSOP 积分技术，可得

$$
\begin{aligned}
\Theta a^{\dagger m}a^n\Theta &= \frac{2}{1-s'}\int\frac{d^2\beta}{\pi}\langle-\beta\mid\Theta a^{\dagger m}a^n\Theta\mid\beta\rangle\Theta' \\
&\quad \exp\left[-\frac{2}{1-s'}(s'\mid\beta\mid^2-\beta^* a+\beta a^\dagger-a^\dagger a)\right]\Theta' \\
&= \frac{2(-i)^{n+m}}{1-s'}\left(\frac{1-s}{2}\right)^{(n+m)/2}\int\frac{d^2\beta}{\pi}H_{m,n}\left(-i\sqrt{\frac{2}{1-s}}\beta^*,\right. \\
&\quad \left. i\sqrt{\frac{2}{1-s}}\beta\right)\times\Theta'\exp\left[-\frac{2}{1-s'}\mid\beta\mid^2-\right. \\
&\quad \left.\frac{2}{1-s'}(-\beta^* a+\beta a^\dagger-a^\dagger a)\right]\Theta' \\
&= \frac{2(-i)^{n+m}}{1-s'}\left(\frac{1-s}{2}\right)^{(n+m)/2}\frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m\partial\tau^n}\int\frac{d^2\beta}{\pi} \\
&\quad \Theta'\exp\left[-\frac{2}{1-s'}\mid\beta\mid^2+\left(i\tau\sqrt{\frac{2}{1-s}}-\frac{2a^\dagger}{1-s'}\right)\beta-\right. \\
&\quad \left.\left(it\sqrt{\frac{2}{1-s}}-\frac{2a}{1-s'}\right)\beta^*+\frac{2a^\dagger a}{1-s'}-t\tau\right]_{t=\tau=0}\Theta' \\
&= (-i)^{n+m}\left(\frac{s'-s}{2}\right)^{(n+m)/2}\Theta' H_{m,n}\left(i\sqrt{\frac{2}{s'-s}}a^\dagger,\right. \\
&\quad \left. i\sqrt{\frac{2}{s'-s}}a\right)\Theta'
\end{aligned}
\tag{11.36}
$$

其中用到了

$$
H_{m,n}(\xi,\eta)=\frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m\partial\tau^n}\exp(-t\tau+t\xi+\tau\eta)\Big|_{t=\tau=0}
\tag{11.37}
$$

和积分公式(4.114)，当 $s' = 1$ 时，式(11.36)将还原为式(11.32).

## 11.7 $\Delta_s(\alpha)$的相干态表象

对式(11.8)，从左边乘以 $\langle -\beta|$，右边乘以 $|\beta\rangle$，并利用式(11.2)进行如下计算

$$
\begin{aligned}
&\langle -\beta \mid \rho \mid \beta\rangle \\
&= 2\int \mathrm{d}^2\alpha \langle -\beta \mid \Delta_s(\alpha^*, \alpha) \mid \beta\rangle \,\mathfrak{I}(\alpha^*, \alpha) \\
&= \frac{2\mathrm{e}^{-2|\beta|^2}}{(1-s)\pi}\int \mathrm{d}^2\alpha \exp\left[\frac{-2}{(1-s)}(-\beta^* - \alpha^*)(\beta - \alpha)\right]\mathfrak{I}(\alpha^*, \alpha)
\end{aligned}
\tag{11.38}
$$

令 $\alpha' = \dfrac{2\alpha}{1-s}$，则

$$
\begin{aligned}
\langle -\beta \mid \rho \mid \beta\rangle = \frac{(1-s)}{2}\int \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}\exp\left[\frac{2s}{(1-s)} \mid \beta \mid^2 - \frac{(1-s)}{2} \mid \alpha \mid^2\right] \\
\mathfrak{I}\left(\frac{(1-s)}{2}\alpha^*, \frac{(1-s)}{2}\alpha\right)\mathrm{e}^{\beta\alpha^* - \beta^*\alpha}
\end{aligned}
\tag{11.39}
$$

$\mathrm{e}^{\beta\alpha^* - \beta^*\alpha}$可以被看作一傅里叶积分核，那么式(11.39)的逆变换是

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{I}\left(\frac{(1-s)}{2}\alpha^*, \frac{(1-s)}{2}\alpha\right) \\
&= \frac{2}{1-s}\exp\left[\frac{(1-s)}{2} \mid \alpha \mid^2\right]\int \frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi} \times \\
&\quad \langle -\beta \mid \rho \mid \beta\rangle \mathrm{e}^{\beta^*\alpha - \beta\alpha^*}\exp\left[\frac{-2s}{(1-s)} \mid \beta \mid^2\right]
\end{aligned}
\tag{11.40}
$$

其中与 $\beta$ 有关的项是

$$
\mathrm{Tr}\left[\rho\int \frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi} \mid \beta\rangle\langle -\beta \mid \mathrm{e}^{\beta^*\alpha - \beta\alpha^*}\exp\left(\frac{-2s}{1-s} \mid \beta \mid^2\right)\right]
\tag{11.41}
$$

从中可以得到 $\Delta_s(\alpha)$ 的相干态表象表示

$$\Delta_s(\alpha) = \frac{2}{1-s}\exp\left(\frac{1-s}{2}|\alpha|^2\right)\times$$
$$\int \frac{d^2\beta}{\pi}|\beta\rangle\langle-\beta| e^{\beta^*\alpha-\beta\alpha^*}\exp\left[\frac{-2s}{(1-s)}|\beta|^2\right] \quad (11.42)$$

## 11.8 $\Delta_s(x, p)$ 的 Radon 变换

在式(11.4)中，令 $\alpha = \frac{x+\mathrm{i}p}{\sqrt{2}}$（本节仍用 $x$ 代替 $q$），则可以得到

$$\Delta_s(\alpha) \to \Delta_s(x, p)$$
$$= \frac{1}{(1-s)\pi} : \exp\left[\frac{-2}{1-s}\left(a^\dagger - \frac{x-\mathrm{i}p}{\sqrt{2}}\right)\left(a - \frac{x+\mathrm{i}p}{\sqrt{2}}\right)\right] :$$
$$= \frac{1}{(1-s)\pi} : \exp\left\{-\frac{1}{1-s}(p-P)^2 - \frac{1}{1-s}(x-X)^2\right\} : \quad (11.43)$$

利用式(11.43)，我们来计算 $\Delta_s(x, p)$ 的 Radon 变换

$$\int dx' dp' \delta(x - \lambda x' - \nu p')\Delta_s(x', p')$$
$$= \sqrt{\frac{\lambda^2}{(1-s)\pi(\lambda^2+\nu^2)}} : \exp\left\{\frac{-[x-(\lambda X+\nu P)]^2}{(1-s)(\lambda^2+\nu^2)}\right\} : \quad (11.44)$$

当 $s=0$ 时，它就可以表示为纯态形式

$$\sqrt{\frac{1}{\pi(\lambda^2+\nu^2)}} : e^{-\frac{1}{\lambda^2+\nu^2}[x-(\lambda X+\nu P)]^2} := |x\rangle_{\lambda,\nu\,\lambda,\nu}\langle x|$$
$$(11.45)$$

其中 $|x\rangle_{\lambda,\nu}$ 就是坐标-动量中介表象，在 Fock 空间的形式是式(9.22)。

## 11.9 带 $s$ 参数的范氏变换[3]

基于算符 $s$ -编序的相关内容，我们把范氏变换进行推广，引入带 $s$ 参数的范氏变换，发现它仍然具备很好的性质.

在 $q-p$ 相空间，定义一个带 $s$ 参数的积分变换

$$\iint \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi}\exp[2\mathrm{i}(p-\mathrm{i}sq-x)(q-\mathrm{i}sp-y)]f(p,\ q)=F(x,\ y) \tag{11.46}$$

当 $f(p,\ q)=\exp\{2\mathrm{i}s^2pq-s(q^2+p^2)\}$ 时，会发现

$$\iint \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi}\exp[2\mathrm{i}(p-\mathrm{i}sq-x)(q-\mathrm{i}sp-y)+2\mathrm{i}s^2pq-s(q^2+p^2)]$$
$$=(1+s^2)^{-1/2}\exp[-s(y^2+x^2)] \tag{11.47}$$

式(11.46)的逆变换为

$$\iint \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi}\exp[-2\mathrm{i}(p-\mathrm{i}sq-x)(q-\mathrm{i}sp-y)]F(x,\ y)=f(p,\ q) \tag{11.48}$$

其证明如下：将式(11.46)代入到式(11.48)的左边得到

$$\iint \frac{\mathrm{d}p'\mathrm{d}q'}{\pi}f(p',\ q')\iint \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi}\exp[2\mathrm{i}(p'-\mathrm{i}sq'-x)(q'-\mathrm{i}sp'-y)-$$
$$2\mathrm{i}(p-\mathrm{i}sq-x)(q-\mathrm{i}sp-y)]$$
$$=\iint \mathrm{d}p'\mathrm{d}q'f(p',\ q')\delta(p-\mathrm{i}sq-p'+\mathrm{i}sq')\delta(q-\mathrm{i}sp-q'+\mathrm{i}sp')\times$$
$$\exp[2\mathrm{i}(p'-\mathrm{i}sq')(q'-\mathrm{i}sp')-2\mathrm{i}(p-\mathrm{i}sq)(q-\mathrm{i}sp)]$$
$$=f(p,\ q) \tag{11.49}$$

这个变换的 Parseval-like 定理为

$$\iint \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi}\mid F(x,\ y)\mid^2$$

$$=\iint \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi}\iint \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi}f(p,q)\iint \frac{\mathrm{d}p'\mathrm{d}q'}{\pi}f^*(p',q')\times$$

$$\exp[2\mathrm{i}(p-\mathrm{i}sq-x)(q-\mathrm{i}sp-y)-$$

$$2\mathrm{i}(p'+\mathrm{i}sq'-x)(q'+\mathrm{i}sp'-y)]$$

$$=\iint \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi}f(p,q)\iint \mathrm{d}p'\mathrm{d}q'f^*(p',q')$$

$$\delta(p'+\mathrm{i}sq'-p+\mathrm{i}sq)\delta(q'+\mathrm{i}sp'-q+\mathrm{i}sp)$$

$$=\iint \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi}\mid f(p,q)\mid^2 \tag{11.50}$$

下面我们看算符 $\mathrm{e}^{\lambda p+\sigma q}$ 的带 $s$ 参数的范氏变换为

$$\iint \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi}\exp[2\mathrm{i}(p-\mathrm{i}sq-x)(q-\mathrm{i}sp-y)]\mathrm{e}^{\lambda p+\sigma q}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{-2s}}\int \frac{\mathrm{d}q}{\pi}\exp\Big[\frac{1}{-8s}(2\mathrm{i}q-2\mathrm{i}qs^2+\lambda-2\mathrm{i}y-2sx)^2+$$

$$2sq^2-2sqy-2\mathrm{i}xq+2\mathrm{i}xy+\sigma q\Big]$$

$$=\frac{1}{1+s^2}\exp\Big\{\frac{1}{2(1+s^2)^2}[\mathrm{i}(1-s^2)\sigma\lambda-s(\sigma^2+\lambda^2)]+$$

$$\frac{1}{1+s^2}[(\lambda+\mathrm{i}s\sigma)x+(\sigma+\mathrm{i}s\lambda)y]\Big\} \tag{11.51}$$

$\mathrm{e}^{\lambda p+\sigma q}$ 的带 $s$ 参数的范氏逆变换也可以得到

$$\iint \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi}\exp[-2\mathrm{i}(p-\mathrm{i}sq-x)(q-\mathrm{i}sp-y)]\mathrm{e}^{\lambda p+\sigma q}$$

$$=\frac{1}{1+s^2}\exp\Big\{-\frac{1}{2(1+s^2)^2}[\mathrm{i}(1-s^2)\sigma\lambda-s(\sigma^2+\lambda^2)]+$$

$$\frac{1}{1+s^2}[(\lambda+\mathrm{i}s\sigma)x+(\sigma+\mathrm{i}s\lambda)y]\Big\} \tag{11.52}$$

由 Weyl 对应知道

$$\exp(\mathrm{i}Qu+\mathrm{i}P\nu)=\vdots\exp(\mathrm{i}Qu+\mathrm{i}P\nu)\vdots \tag{11.53}$$

所以引入变换核

$$\frac{1}{\pi}:\exp[2\mathrm{i}(q-\mathrm{i}sp-Q)(p-\mathrm{i}sq-P)]: \tag{11.54}$$

并将式(11.51)发展到量子力学表象，有

$$\iint\frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi}:\exp[2\mathrm{i}(p-\mathrm{i}sq-P)(q-\mathrm{i}sp-Q)]:\mathrm{e}^{\lambda p+\sigma q}$$
$$=\frac{1}{1+s^2}:\exp\left\{\frac{1}{2(1+s^2)^2}[\mathrm{i}(1-s^2)\sigma\lambda-s(\sigma^2+\lambda^2)]+\frac{1}{1+s^2}[(\lambda+\mathrm{i}s\sigma)P+(\sigma+\mathrm{i}s\lambda)Q]\right\}: \tag{11.55}$$

同理式(11.52)也将变为

$$\iint\frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi}:\exp[-2\mathrm{i}(p-\mathrm{i}sq-P)(q-\mathrm{i}sp-Q)]:\mathrm{e}^{\lambda p+\sigma q}$$
$$=\frac{1}{1+s^2}:\exp\left\{-\frac{1}{2(1+s^2)^2}[\mathrm{i}(1-s^2)\sigma\lambda-s(\sigma^2+\lambda^2)]+\frac{1}{1+s^2}[(\lambda+\mathrm{i}s\sigma)P+(\sigma+\mathrm{i}s\lambda)Q]\right\}: \tag{11.56}$$

这个变换核代表的具体物理意义，可以从下式给出

$$\frac{1}{\pi}:\exp[-2\mathrm{i}(q-\mathrm{i}sp-Q)(p-\mathrm{i}sq-P)]:$$
$$=\iint\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}\nu}{4\pi^2}:\exp\left[\frac{\mathrm{i}u\nu}{2}+\mathrm{i}(q-\mathrm{i}sp-Q)u+\mathrm{i}(p-\mathrm{i}sq-P)\nu\right]:$$
$$=\iint\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}\nu}{4\pi^2}\exp\left[\frac{\mathrm{i}u\nu}{2}+\mathrm{i}(q-\mathrm{i}sp-Q)u+\mathrm{i}(p-\mathrm{i}sq-P)\nu\right]$$
$$=\iint\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}\nu}{4\pi^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q-\mathrm{i}sp-Q)u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-\mathrm{i}sq-P)\nu}$$
$$=\delta(q-\mathrm{i}sp-Q)\delta(p-\mathrm{i}sq-P) \tag{11.57}$$

类似地也有

$$\frac{1}{\pi}:\exp[2\mathrm{i}(p-\mathrm{i}sq-P)(q-\mathrm{i}sp-Q)]:$$
$$=\delta(p-\mathrm{i}sq-P)\delta(q-\mathrm{i}sp-Q) \tag{11.58}$$

所以立即得到

$$\iint\frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi}:\exp[-2\mathrm{i}(q-\mathrm{i}sp-Q)(p-\mathrm{i}sq-P)]:f(p,q)$$
$$=\iint\mathrm{d}p\mathrm{d}q\,\delta(q-\mathrm{i}sp-Q)\delta(p-\mathrm{i}sq-P)f(p,q)$$
$$=f\left(\frac{\mathrm{i}s}{1+s^2}Q+\frac{1}{1+s^2}P,\ \frac{1}{1+s^2}Q+\frac{\mathrm{i}s}{1+s^2}P\right)_{Q\ \text{before}\ P} \tag{11.59}$$

和

$$\iint\frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{\pi}:\exp[2\mathrm{i}(p-\mathrm{i}sq-P)(q-\mathrm{i}sp-Q)]:f(p,q)$$
$$=\iint\mathrm{d}p\mathrm{d}q\,\delta(p-\mathrm{i}sq-P)\delta(q-\mathrm{i}sp-Q)f(p,q)$$
$$=f\left(\frac{\mathrm{i}s}{1+s^2}Q+\frac{1}{1+s^2}P,\ \frac{1}{1+s^2}Q+\frac{\mathrm{i}s}{1+s^2}P\right)_{P\ \text{before}\ Q} \tag{11.60}$$

## 11.10 光子计数公式的 $s$ 参数形式[4]

在量子光学中,光子计数公式对于判断光场的非经典特性是非常重要的,对电磁场的测量大部分是通过光电效应来探测光子的吸收.这不仅适用于科学研究中的光电二极管、光电倍增管等,而且用于改良照相机底片.所以对于光子数探测的问题一直是科学家关注的焦点.

本节,利用 IWSOP 技术和带 $s$ 参数的量子化方案,给出带 $s$ 参数的光子计数公式,当 $s$ 取不同的值时,将给出不同形式的公

式，这对科学研究带来了极大的便利.

量子力学中的光子计数公式最初由 Kelley 和 Kleiner 提出，对于单模辐射场，在时间间隔 $T$ 探测到 $m$ 个光子的几率 $\widetilde{p}(m, T)$ 为

$$\widetilde{p}(m, T) = \mathrm{Tr}\left[\rho : \frac{(\xi a^{\dagger} a)^m}{m!} \mathrm{e}^{-\xi a^{\dagger} a} :\right] \tag{11.61}$$

$\rho$ 是光场的单模密度算符，$\xi \propto T$ 是探测效率.

首先，给出算符 $:(a^{\dagger} a)^m \mathrm{e}^{-\xi a^{\dagger} a}:$ 的 $s$-编序形式. 利用 $\langle -\beta|\beta\rangle = \mathrm{e}^{-2|\beta|^2}$ 及式(11.18)和 IWSOP 技术，可得

$$\begin{aligned}
&:(a^{\dagger} a)^m \mathrm{e}^{-\xi a^{\dagger} a}: = \frac{2}{1-s}\int \frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\langle -\beta | :(a^{\dagger} a)^m \mathrm{e}^{-\xi a^{\dagger} a}: |\beta\rangle \times \\
&\Theta \exp\left[-\frac{2}{1-s}(s|\beta|^2 - \beta^* a + \beta a^{\dagger} - a^{\dagger} a)\right]\Theta \\
&= \frac{2(s-1)^m}{(s\xi - \xi + 2)^{m+1}} \Theta \exp\left(-\frac{2\xi a^{\dagger} a}{s\xi - \xi + 2}\right) \sum_{l=0}^{m} \frac{(m!)^2}{l![(m-l)!]^2} \\
&\left[\frac{4a^{\dagger} a}{(s-1)(s\xi - \xi + 2)}\right]^{m-l} \Theta
\end{aligned} \tag{11.62}$$

其中用了积分公式(2.93)，再由拉盖尔多项式的定义式

$$\mathrm{L}_m(x) = \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \frac{(-x)^l}{l!} \tag{11.63}$$

式(11.62)变为

$$\begin{aligned}
&:(a^{\dagger} a)^m \mathrm{e}^{-\xi a^{\dagger} a}: \\
&= \frac{2m!(s-1)^m}{(s\xi - \xi + 2)^{m+1}} \Theta \exp\left(\frac{-2\xi a^{\dagger} a}{s\xi - \xi + 2}\right) \mathrm{L}_m\left(\frac{4a^{\dagger} a}{(1-s)(s\xi - \xi + 2)}\right)\Theta
\end{aligned} \tag{11.64}$$

这是一个新的算符公式. 再利用公式(11.8)可得 $\Theta \exp\left(\frac{-2\xi a^{\dagger} a}{s\xi - \xi + 2}\right)$ $\mathrm{L}_m\left(\frac{4a^{\dagger} a}{(1-s)(s\xi - \xi + 2)}\right)\Theta$ 的经典对应函数，

$$\Theta\exp\left(\frac{-2\xi a^{\dagger}a}{s\xi-\xi+2}\right)\mathrm{L}_m\left(\frac{4a^{\dagger}a}{(1-s)(s\xi-\xi+2)}\right)\Theta$$
$$=2\int\mathrm{d}^2\alpha\Delta_s(\alpha)\exp\left(\frac{-2\xi|\alpha|^2}{s\xi-\xi+2}\right)\mathrm{L}_m\left(\frac{4|\alpha|^2}{(1-s)(s\xi-\xi+2)}\right) \tag{11.65}$$

所以

$$\begin{aligned}\widetilde{p}(m,T)&=\mathrm{Tr}\left[\rho:\frac{(\xi a^{\dagger}a)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\xi a^{\dagger}a}:\right]\\&=\frac{2(s-1)^m\xi^m}{(s\xi-\xi+2)^{m+1}}\int\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}W_s(\alpha)\exp\left(\frac{-2\xi|\alpha|^2}{s\xi-\xi+2}\right)\times\\&\quad\mathrm{L}_m\left(-\frac{4|\alpha|^2}{(s-1)(s\xi-\xi+2)}\right)\end{aligned} \tag{11.66}$$

其中 $W_s(\alpha)=2\pi\mathrm{Tr}[\rho\Delta_s(\alpha)]$ 是带 $s$ 参数的 Wigner 函数. 这是一个新的带 $s$ 参数的光子计数公式，一旦知道了密度算符 $\rho$ 的 Wigner 函数，就可以用这个公式来求解了. 例如当 $s=-1$ 时，有

$$\begin{aligned}W_s(\alpha)\rightarrow W_{s=-1}(\alpha)&=2\pi\mathrm{Tr}[\rho\Delta_s(\alpha)]=2\pi\mathrm{Tr}[\rho|\alpha\rangle\langle\alpha|]\\&=2\pi\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle\end{aligned} \tag{11.67}$$

那么式(11.66)变为

$$\begin{aligned}\widetilde{p}(m,T)&=\frac{2(-\xi)^m}{(1-\xi)^{m+1}}\int\mathrm{d}^2\alpha\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle\exp\left(-\frac{\xi|\alpha|^2}{1-\xi}\right)\mathrm{L}_m\left(\frac{|\alpha|^2}{1-\xi}\right)\\&=\frac{2\xi^m}{(\xi-1)^m}\int\mathrm{d}^2\alpha\langle\sqrt{1-\xi}\alpha|\rho|\sqrt{1-\xi}\alpha\rangle\mathrm{e}^{-\xi|\alpha|^2}\mathrm{L}_m(|\alpha|^2)\end{aligned} \tag{11.68}$$

可以看出，只要知道了密度算符 $\rho$ 的相干态平均值，就可以利用这个公式来计算相应的光子数分布了.

另一方面，当 $s=0$ 时，$\Delta_s(\alpha)$ 将变为通常的 Wigner 算符(4.12)，所以

$$W_s(\alpha)\rightarrow W_{s=0}(\alpha)=2\pi\mathrm{Tr}[\rho\Delta(\alpha)]\equiv W(\alpha) \tag{11.69}$$

式(11.66)就变为

$$\tilde{p}(m, T) = \frac{2(-\xi)^m}{(2-\xi)^{m+1}}\int \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi} W(\alpha)\exp\left(\frac{2\xi |\alpha|^2}{\xi-2}\right)\mathrm{L}_m\left(\frac{4|\alpha|^2}{2-\xi}\right) \tag{11.70}$$

知道了密度算符的 Wigner 函数,根据这个式子来计算光子数分布是很方便的.

## 11.11 算符 $:(a^\dagger a)^m \mathrm{e}^{-\xi a^\dagger a}:$ 的经典对应

利用式(11.6)和式(11.10)以及相干态表象的完备性,可以得到算符 $:(a^\dagger a)^m \mathrm{e}^{-\xi a^\dagger a}:$ 的经典对应为

$$\begin{aligned}
&2\pi\mathrm{Tr}\left[\Delta_{-s}(\alpha) : (a^\dagger a)^m \mathrm{e}^{-\xi a^\dagger a} :\right] \\
&= \frac{2\mathrm{e}^{-\frac{2}{1-s}|\alpha|^2}}{1+s}\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\langle z | \mathrm{e}^{\frac{2}{1-s}\alpha a^\dagger} \mathrm{e}^{a^\dagger a \ln\frac{s+1}{s-1}} \mathrm{e}^{\frac{2}{1-s}\alpha^* a} : (a^\dagger a)^m \mathrm{e}^{-\xi a^\dagger a} : | z\rangle \\
&= \frac{2\mathrm{e}^{-\frac{2}{1-s}|\alpha|^2}}{1+s}\int \frac{\mathrm{d}^2 z \mathrm{d}^2 z'}{\pi^2}\langle z | \mathrm{e}^{\frac{2}{1-s}\alpha a^\dagger} \mathrm{e}^{a^\dagger a \ln\frac{s+1}{s-1}} \mathrm{e}^{\frac{2}{1-s}\alpha^* a} | z'\rangle \\
&\quad \langle z' | : (a^\dagger a)^m \mathrm{e}^{-\xi a^\dagger a} : | z\rangle \\
&= \frac{2\mathrm{e}^{-\frac{2}{1-s}|\alpha|^2}}{1+s}\int \frac{\mathrm{d}^2 z \mathrm{d}^2 z'}{\pi^2}(z'^* z)^m \exp\left[\frac{2\alpha}{1+s}z^* + \left(\frac{s-1}{s+1}-1\right)z^* z' - \right. \\
&\quad \left. |z'|^2 - |z|^2 + z'^* z + z^* z' + \frac{2\alpha^*}{1+s}z' - \xi z'^* z\right] \\
&= \frac{2m!(1-s)^m}{(s\xi-\xi+2)^{m+1}}\exp\left(\frac{-2\xi|\alpha|^2}{s\xi-\xi+2}\right) \\
&\quad \sum_{l=0}^{m}\frac{(-1)^l m!\left(\frac{4|\alpha|^2}{s^2-1}\right)^{m-l}}{l!(m-l)!(m-l)!}\left(-\frac{s+1}{s\xi-\xi+2}\right)^{m-l}
\end{aligned} \tag{11.71}$$

其中用到了积分公式(2.93),再利用拉盖尔多项式的定义(11.63),则得到

$$2\pi \mathrm{Tr}[\Delta_{-s}(\alpha) : (a^{\dagger}a)^{m} \mathrm{e}^{-\xi a^{\dagger}a} :]$$
$$= \frac{2m!(s-1)^{m}}{(s\xi-\xi+2)^{m+1}} \exp\left(\frac{-2\xi|\alpha|^{2}}{s\xi-\xi+2}\right) \mathrm{L}_{m}\left(-\frac{4|\alpha|^{2}}{(s-1)(s\xi-\xi+2)}\right) \tag{11.72}$$

式子右边即为算符$:(a^{\dagger}a)^{m}\mathrm{e}^{-\xi a^{\dagger}a}:$的经典对应.

## 11.12 纠缠形式的 $s$ 参数的 Wigner 算符[5]

类似于单模 $s$ 参数 Wigner 算符的引入,给出双模的 $s$ 参数 Wigner 算符($\eta$, $\xi$ 为复数)

$$\Delta_{s}(\sigma, \gamma) = \int \frac{\mathrm{d}^{2}\eta \mathrm{d}^{2}\xi}{4\pi^{2}} \exp\Big[\frac{s}{2}|\eta|^{2} + \eta a^{\dagger} - \eta^{*} a + \frac{1}{2}(\xi^{*}-\eta)\gamma^{*} + \frac{1}{2}(\eta^{*}-\xi)\gamma\Big] \times \exp\Big[\frac{s}{2}|\xi|^{2} + \xi b^{\dagger} - \xi^{*} b + \frac{1}{2}(\eta^{*}+\xi)\sigma - \frac{1}{2}(\eta+\xi^{*})\sigma^{*}\Big] \tag{11.73}$$

利用恒等式

$$\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B} = \exp\left(A+B+\frac{1}{2}[A, B]\right),$$
$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0 \tag{11.74}$$

以及 IWOP 积分技术,对于 $s<1$, 可以将式(11.73)化为正规乘积形式,即

$$\Delta_{s}(\sigma, \gamma) = \frac{1}{(1-s)^{2}\pi^{2}} : \exp\Big[-\frac{1}{1-s}(\sigma - a + b^{\dagger})(\sigma^{*} - a^{\dagger} + b) - \frac{1}{1-s}(\gamma - a - b^{\dagger})(\gamma^{*} - a^{\dagger} - b)\Big] : \tag{11.75}$$

事实上，引入

$$\alpha=\frac{\sigma+\gamma}{2},\ \beta=\frac{\gamma^*-\sigma^*}{2},\ \gamma=\alpha+\beta^*,\ \sigma=\alpha-\beta^* \tag{11.76}$$

并将它们代入到式(11.75)并与单模 $s$ 参数 Wigner 算符比较可以得到

$$\begin{aligned}&\Delta_s(\sigma,\ \gamma)\\&=\frac{1}{(1-s)^2\pi^2}:\exp\left[-\frac{2}{1-s}(a^\dagger-\alpha^*)(a-\alpha)+(b^\dagger-\beta^*)(b-\beta)\right]:\\&=\Delta_s(\alpha)\Delta_s(\beta)\end{aligned} \tag{11.77}$$

计算可得

$$\mathrm{Tr}[\Delta_{-s}(\sigma',\ \gamma')\Delta_s(\sigma,\ \gamma)]=\frac{1}{4\pi^2}\delta^2(\sigma'-\sigma)\delta^2(\gamma'-\gamma) \tag{11.78}$$

所以得到双模的广义 $s$ 参数 Weyl-Wigner 对应，

$$\rho=\int d^2\sigma\int d^2\gamma\Delta_s(\sigma,\ \gamma)\,\mathfrak{I}(\sigma,\ \gamma,\ s), \tag{11.79}$$

$$\mathfrak{I}(\sigma,\ \gamma,\ s)=4\pi^2\,\mathrm{Tr}[\rho\Delta_{-s}(\sigma,\ \gamma)] \tag{11.80}$$

对 $\Delta_s(\sigma,\ \gamma)$ 做 $d^2\sigma$ 的积分，得到

$$\begin{aligned}&\int d^2\sigma\Delta_s(\sigma,\ \gamma)\\&=\frac{1}{(1-s)\pi}:\exp\left[-\frac{1}{1-s}(\gamma-a-b^\dagger)(\gamma^*-a^\dagger-b)\right]:\end{aligned} \tag{11.81}$$

当 $s=0$，将变为纠缠态 $|\xi\rangle$ 的投影算符

$$\int d^2\sigma\Delta_{s=0}(\sigma,\ \gamma)=\frac{1}{\pi}\,|\,\xi\rangle\langle\xi\,|_{\xi=\gamma} \tag{11.82}$$

这是我们熟知的结果. 另一方面，做 $d^2\gamma$ 的积分给出

$$\int d^2\gamma \Delta_s(\sigma, \gamma)$$

$$= \frac{1}{(1-s)\pi} : \exp\left[-\frac{1}{1-s}(\sigma - a + b^{\dagger})(\sigma^* - a^{\dagger} + b)\right]: \quad (11.83)$$

对于 $s=0$ 给出

$$\int d^2\gamma \Delta_{s=0}(\sigma, \gamma) = \frac{1}{\pi} \mid \eta\rangle\langle\eta\mid_{\eta=\sigma} \quad (11.84)$$

$|\eta\rangle$与$|\xi\rangle$是互为共轭的.

## 11.13 双模 $\Delta_s(\sigma, \gamma)$的 $s$ -编序展开

根据式(11.75)和式(11.18),双模 $\Delta_s(\sigma, \gamma)$的 $s$ -编序展开为

$$\begin{aligned}
\Delta_s(\sigma, \gamma) = & \frac{4}{(1-s)^4\pi^2}\Theta\int\frac{d^2\beta}{\pi}\times \\
& \exp\left[-\frac{(\sigma^*-\gamma^*+2b)\beta^* + (\sigma-\gamma+2b^{\dagger})\beta}{s-1}\right]\times \\
& \int\frac{d^2\alpha}{\pi}\exp\left[-\frac{(2b-\sigma-\gamma)\alpha^* + (\sigma^*+\gamma^*-2b^{\dagger})\alpha}{s-1}\right]\times \\
& \exp\left[-\frac{(-\gamma\gamma^*-\sigma\sigma^*+2aa^{\dagger}+2bb^{\dagger})}{s-1}\right]\Theta \\
= & \frac{16}{(1-s)^4}\Theta\delta\left[\frac{2}{s-1}(a^{\dagger}-b-\sigma^*)\right]\delta\left[\frac{2}{s-1}(a-b^{\dagger}-\sigma)\right]\times \\
& \delta\left[\frac{2}{s-1}(a^{\dagger}+b-\gamma^*)\right]\delta\left[\frac{2}{s-1}(a+b^{\dagger}-\gamma)\right]\Theta \quad (11.85)
\end{aligned}$$

当 $s=0$ 时,它就变为一般的纠缠 Wigner 算符的 Weyl 编序形式(7.79).

## 11.14 应用

作为应用,来求双模压缩算符 $S_2 \equiv e^{\lambda(a^{\dagger}b^{\dagger}-ab)}$ 的 $s$ -编序展开($\lambda$

是实数). 双模压缩算符在纠缠态表象可以写为投影算符的积分形式,即

$$S_2 = \mathrm{e}^{\lambda}\int \frac{\mathrm{d}^2\xi}{\pi} \mid \xi \mathrm{e}^{\lambda}\rangle\langle \xi \mid \tag{11.86}$$

利用 IWOP 积分技术,可以立即得到它的正规乘积形式(而不必通过 SU(1, 1)李代数)

$$\begin{aligned} S_2 &= \mathrm{e}^{\lambda}\int \frac{\mathrm{d}^2\xi}{\pi} \mid \xi \mathrm{e}^{\lambda}\rangle\langle \xi \mid \\ &= \operatorname{sech}\lambda :\exp[a^{\dagger}b^{\dagger}\tanh\lambda + (\operatorname{sech}\lambda - 1)(a^{\dagger}a + b^{\dagger}b) - ab\tanh\lambda]: \end{aligned} \tag{11.87}$$

将其代入到算符 $s$-编序的展开公式(11.18)并积分给出

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{4\operatorname{sech}\lambda}{(1-s)^2}\Theta\int \frac{\mathrm{d}^2\beta \mathrm{d}^2\alpha}{\pi^2}\exp\Big[-A\mid\beta\mid^2 + \Big(\frac{2a^{\dagger}}{s-1} - \alpha\tanh\lambda\Big)\beta + \\ &\quad \Big(\alpha^*\tanh\lambda - \frac{2a}{s-1}\Big)\beta^*\Big] \times \exp\Big[-A\mid\alpha\mid^2 - \frac{2b}{s-1}\alpha^* + \\ &\quad \frac{2b^{\dagger}}{s-1}\alpha - \frac{2(b^{\dagger}b + a^{\dagger}a)}{s-1}\Big]\Theta \\ &= \frac{4\operatorname{sech}\lambda}{B}\Theta\exp\Big[\frac{4}{B}(a^{\dagger}b^{\dagger} - ab)\tanh\lambda - \Big(\frac{4A}{B} + \frac{2}{s-1}\Big)\times \\ &\quad (b^{\dagger}b + a^{\dagger}a)\Big]\Theta \end{aligned} \tag{11.88}$$

其中定义了

$$A = \frac{1+s}{1-s} + \operatorname{sech}\lambda,\ B = (A^2 + \tanh^2\lambda)(s-1)^2 \tag{11.89}$$

这个式子以前没有人给出过,是一个新的公式. 再根据 $s$ 参数量子化方案,算符 $\mathrm{e}^{\lambda(a^{\dagger}b^{\dagger} - ab)}$ 的经典对应为

$$\frac{4\operatorname{sech}\lambda}{B}\exp\left[\frac{4}{B}(\alpha^{*}\beta^{*}-\alpha\beta)\tanh\lambda-\left(\frac{4A}{B}+\frac{2}{s-1}\right)(\alpha^{*}\alpha+\beta^{*}\beta)\right] \tag{11.90}$$

下面讨论一下,对于 $s=1$, $\Theta\cdots\Theta\rightarrow :\quad :$,得到

$$\lim_{s\to1}\frac{4}{B}=1,\ \lim_{s\to1}2\left(\frac{2A}{B}+\frac{1}{s-1}\right)=1-\operatorname{sech}\lambda \tag{11.91}$$

式(11.88)退化为式(11.87). 而当 $s=0$, $\Theta\cdots\Theta\rightarrow \begin{smallmatrix}:\\:\end{smallmatrix}\quad\begin{smallmatrix}:\\:\end{smallmatrix}$,有

$$A=1+\operatorname{sech}\lambda,\ B=2(1+\operatorname{sech}\lambda) \tag{11.92}$$

式(11.88)给出双模压缩算符的 Weyl 编序形式

$$e^{\lambda(a^{\dagger}b^{\dagger}-ab)}=\frac{2\operatorname{sech}\lambda}{2\operatorname{sech}\lambda+1}\begin{smallmatrix}:\\:\end{smallmatrix}\exp\left[\frac{2\tanh\lambda}{\operatorname{sech}\lambda+1}(a^{\dagger}b^{\dagger}-ab)\right]\begin{smallmatrix}:\\:\end{smallmatrix} \tag{11.93}$$

当 $s=-1$, $\Theta\cdots\Theta\rightarrow \vdots\quad\vdots$,给出

$$A=\operatorname{sech}\lambda,\ B=4 \tag{11.94}$$

得到

$$\begin{aligned}e^{\lambda(a^{\dagger}b^{\dagger}-ab)}=\operatorname{sech}\lambda\ \vdots\ \exp[&(a^{\dagger}b^{\dagger}-ab)\tanh\lambda+\\&(1-\operatorname{sech}\lambda)(a^{\dagger}a+b^{\dagger}b)]\ \vdots\end{aligned} \tag{11.95}$$

利用式(11.22),去掉反正规编序符号 $\vdots\ \vdots$ 有

$$e^{\lambda(a^{\dagger}b^{\dagger}-ab)}=e^{-ab\tanh\lambda}\exp[(a^{\dagger}a+b^{\dagger}b)\ln\cosh\lambda]e^{a^{\dagger}b^{\dagger}\tanh\lambda} \tag{11.96}$$

由式(11.95),双模压缩算符的 Glauber-Sudarshan P 表示也很容易得到

$$\exp[\lambda(a^{\dagger}b^{\dagger}-ab)]$$

$$= \operatorname{sech}\lambda\int\frac{d^2\beta d^2\alpha}{\pi^2}\exp[(\alpha^*\beta^*-\alpha\beta)\tanh\lambda+$$

$$(1-\operatorname{sech}\lambda)(|\alpha|^2+|\beta|^2)]\,|\beta,\alpha\rangle\langle\beta,\alpha| \tag{11.97}$$

下面考虑双模 Fock 态$|m, n\rangle$突然被压缩变为 $e^{\lambda(a^\dagger b^\dagger-ab)}|m, n\rangle$,为了得到它仍然处于初始态的几率,就要计算$\langle m, n|e^{\lambda(a^\dagger b^\dagger-ab)}|m, n\rangle$,利用内积

$$\langle m, n|\beta, \alpha\rangle = \frac{\beta^m\alpha^n}{\sqrt{m!n!}}\exp\left(-\frac{1}{2}|\beta|^2-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \tag{11.98}$$

得到

$$\langle m, n|\exp[\lambda(a^\dagger b^\dagger-ab)]|m, n\rangle$$

$$= \frac{\operatorname{sech}\lambda}{m!n!}\int\frac{d^2\beta d^2\alpha}{\pi^2}\beta^m\beta^{*m}\alpha^n\alpha^{*n}\exp(-\operatorname{sech}\lambda|\alpha|^2-$$

$$\operatorname{sech}\lambda|\beta|^2-\alpha\beta\tanh\lambda+\alpha^*\beta^*\tanh\lambda)$$

$$= \frac{n!}{m!}(\operatorname{sech}\lambda)^{m-n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+m-k)!(-\tanh^2\lambda)^{n-k}}{k![(n-k)!]^2} \tag{11.99}$$

其中用了积分公式(2.93)和

$$\int\frac{d^2z}{\pi}z^{*m}z^n\exp(h|z|^2) = \delta_{m,n}m!\left(-\frac{1}{h}\right)^{m+1} \tag{11.100}$$

由厄米多项式的定义和产生方程,$|\xi\rangle$态可表示为双模 Fock 态$|m, n\rangle$的叠加形式

$$|\xi\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{H_{m,n}(\xi, \xi^*)}{\sqrt{m!n!}}|m, n\rangle \tag{11.101}$$

又因为

$$H_{m,n}(\xi, \xi^*) = e^{i(m-n)\theta}H_{m,n}(r, r),\ \xi = re^{i\theta} \tag{11.102}$$

和

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{H}_{m,n}(r, r) = p!(-1)^p r^l \mathrm{L}_p^l(r^2),\\
&l = |m-n|,\ p = \min(m, n)
\end{aligned} \tag{11.103}
$$

($\mathrm{L}_p^l$是连带勒让德多项式)，那么(不失一般性，考虑 $m>n$)

$$
\begin{aligned}
&\langle m, n \mid \exp[\lambda(a^\dagger b^\dagger - ab)] \mid m, n\rangle\\
&= \mathrm{e}^\lambda \int \frac{\mathrm{d}^2\xi}{\pi} \langle m, n \mid \xi \mathrm{e}^\lambda\rangle\langle \xi \mid m, n\rangle\\
&= \frac{2\mathrm{e}^\lambda}{m!n!}\int_0^\infty r\mathrm{d}r\exp\left(-\frac{\mathrm{e}^{2\lambda}+1}{2}r^2\right)\mathrm{H}_{m,n}(\mathrm{e}^\lambda r, \mathrm{e}^\lambda r)\mathrm{H}_{m,n}(r, r)\\
&= \frac{2\mathrm{e}^\lambda}{m!n!}(n!)^2\int_0^\infty r\mathrm{d}r\exp\left(-\frac{\mathrm{e}^{2\lambda}+1}{2}r^2\right)\times\\
&\quad \mathrm{e}^{\lambda(m-n)} r^{2(m-n)} \mathrm{L}_n^{m-n}(\mathrm{e}^{2\lambda}r^2)\mathrm{L}_n^{m-n}(r^2)\\
&= \frac{n!}{m!}(\mathrm{sech}\,\lambda)^{m-n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+m-k)!(-\tanh^2\lambda)^{n-k}}{k![(n-k)!]^2}
\end{aligned} \tag{11.104}
$$

# 参考文献


[1] Fan Hongyi. Unifying the theory of Integration within normal-, Weyl- and antinormal-ordering of operators and the s-ordered operator expansion formula of density operators [J]. Chin. Phys. B, 2010, 19 (5): 050303.

[2] Fan Hongyi, Yuan Hongchun, Hu Liyun. The essence of the s-parameterized quantization scheme [J]. to be published.

[3] Lv Cuihong, Fan Hongyi. A new two-fold s-parameterized integration transformation [J]. to be published.

[4] Lv Cuihong, Yuan Hongchun, Fan Hongyi. S-parameterized photocount formula [J]. Optik, 2012, 123(5): 395 - 399.

[5] Fan Hongyi, Hu Liyun, Yuan Hongchun. S-parameterized Weyl-Wigner correspondence in the entangled form and its applications [J]. Chin. Phys. B, 2010, 19(6): 060305.

# 第 12 章　纠缠态表象中的路径积分

在量子相空间中的另一课题是路径积分. 路径积分是量子力学数理表达的另一种形式, 其思想起源于 Dirac, 而由 Feynman 具体完成. 路径积分量子化被成功地用于规范场理论.

对于路径积分的作用, Feynman 和 Hibbs 曾写道:"……对于理解量子力学的基础问题, 它可能是首选……". 传播子的路径积分表示对于研究经典的和量子的动力学系统之间的联系提供了新的途径. 由路径积分导出的半经典近似方法很自然地和欧拉-拉格朗日方程相联系. 用相干态表象来研究路径积分最初由 Klauder 实行, 本章着重研究纠缠态表象中的路径积分.

## 12.1　相干态表象的路径积分[1]

在相干态表象中, 哈密顿系统从 $t_1$ 时刻到 $t_2$ 时刻的转换矩阵元为($H$ 不显含 $t$)

$$\begin{aligned}\langle z',\, t' \mid z,\, t\rangle &= \langle z' \mid \exp[-\mathrm{i}HT] \mid z\rangle \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^2 z_1 \cdots \mathrm{d}^2 z_n}{\pi^n} \langle z' \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon H} \mid z_n\rangle\langle z_n \mid \cdots \\ &\quad \mid z_1\rangle\langle z_1 \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon H} \mid z\rangle \\ &= \int \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{d}^2 z_i}{\pi}\right] \prod_{j=1}^{n+1} \langle z_j \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon H} \mid z_{j-1}\rangle \qquad (12.1)\end{aligned}$$

其中 $T = (n+1)\varepsilon$, 并且用到了相干态表象的完备性关系 $\int \frac{\mathrm{d}^2 z_j}{\pi} \mid z_j\rangle\langle z_j \mid = 1,\ (j = 1,\, 2 \cdots n)$. 利用 $\int \mathrm{d}q\mathrm{d}p\Delta(p,\, q) = 1$ 以及 Weyl 对

应规则式(4.7)和式(4.9),可以将式(12.1)中单项写为如下形式

$$\begin{aligned}\langle z_j \mid e^{-i\epsilon H} \mid z_{j-1}\rangle &= \langle z_j \mid (1-i\epsilon H) \mid z_{j-1}\rangle \\ &= \langle z_j \mid \int dq dp e^{-i\epsilon h(p,q)} \Delta(p,q) \mid z_{j-1}\rangle \\ &= \exp\left\{\frac{1}{2}[z_{j-1}(z_j^* - z_{j-1}^*) - z_j^*(z_j - z_{j-1})] - \right. \\ &\quad \left. i\epsilon h_w(z_j^*, z_{j-1})\right\} \end{aligned} \tag{12.2}$$

其中

$$h_w(z_j^*, z_{j-1}) = \frac{1}{\pi}\int dq dp h(p,q) \exp[-2(z_j^* - \alpha^*)(z_{j-1} - \alpha)] \tag{12.3}$$

将式(12.2)代入到式(12.1)就得到

$$\begin{aligned}&\langle z', t' \mid z, t\rangle \\ &= \int \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{d^2 z_i}{\pi}\right] \exp\left\{i\epsilon \prod_{j=1}^{n+1}\left[\frac{1}{2i\epsilon}[z_{j-1}(z_j^* - z_{j-1}^*) - z_j^*(z_j - z_{j-1}) - \right.\right. \\ &\quad \left.\left. h_w(z_j^*, z_{j-1})]\right]\right\} \\ &= \int\left[\frac{d^2 z}{\pi}\right] \exp\left\{i\int_t^{t'} dt\left[\frac{1}{2i}(z\dot{z}^* - z^*\dot{z}) - h_w(z^*, z)\right]\right\} \end{aligned} \tag{12.4}$$

## 12.2 $|\eta\rangle$表象的路径积分[2]

近年来,随着 EPR 关联对思想的建立而引发了量子信息领域的理论探讨和技术研究热潮,使得纠缠态表象的建立和发展既具有很好的理论研究价值,又具有广泛的实际应用价值.特别是连续纠缠态表象在量子力学、量子光学、量子信息中有诸多应用.

本节,我们将研究如何在正交完备的$|\eta\rangle$表象中写出 Feynman 路径积分形式.

对$|\eta\rangle$做傅里叶变换而引入态矢$|\chi\rangle$($\chi$为复数)

$$|\chi\rangle = \int \frac{d^2\eta}{2\pi} |\eta\rangle \exp\left[\frac{i}{2}(\chi\eta^* + \eta\chi^*)\right]$$
$$= \exp\left[-\frac{1}{2}|\chi|^2 + i\chi a^\dagger - i\chi^* b^\dagger - a^\dagger b^\dagger\right]|00\rangle \tag{12.5}$$

那么可以证明$|\chi\rangle$满足下面的本征方程

$$(a+b^\dagger)|\chi\rangle = i\chi|\chi\rangle,\ (a^\dagger + b)|\chi\rangle = -i\chi^*|\chi\rangle \tag{12.6}$$

和$|\eta\rangle$一样，它也是一个完备正交的表象

$$\int \frac{d^2\chi}{\pi}|\chi\rangle\langle\chi| = 1,\ \langle\chi|\chi'\rangle = \pi\delta(\chi-\chi')\delta(\chi^*-\chi'^*) \tag{12.7}$$

不难求出内积$\langle\chi|\eta\rangle$

$$\langle\chi|\eta\rangle = \frac{1}{2}\exp\left[-\frac{i}{2}(\chi\eta^* + \eta\chi^*)\right] \tag{12.8}$$

可见$|\eta\rangle$和$|\chi\rangle$是共轭态，因此可以给出在$|\eta\rangle$和$|\chi\rangle$表象中的路径积分形式. 所以，可把双模 Fock 空间的算符$H(a^\dagger, a; b^\dagger, b)$写成

$$H(a^\dagger, a; b^\dagger, b) = \int \frac{d^2\eta' d^2\chi' d^2\eta'' d^2\chi''}{\pi^4}|\chi'\rangle\langle\chi'|\eta'\rangle$$
$$\langle\eta'|H|\eta''\rangle\langle\eta''|\chi''\rangle\langle\chi''|$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{d^2\eta' d^2\chi' d^2\eta'' d^2\chi''}{\pi^4}|\chi'\rangle\langle\chi''|\langle\eta'|H|\eta''\rangle$$
$$\exp\left[-\frac{i}{2}(\chi'\eta'^* + \eta'\chi'^* - \chi''\eta''^* - \eta''\chi''^*)\right] \tag{12.9}$$

做积分变数变换

$$\eta' = \eta + \frac{\sigma}{2},\ \chi' = \chi + \frac{\lambda}{2},\ \chi'' = \chi - \frac{\lambda}{2},\ \eta'' = \eta - \frac{\sigma}{2} \tag{12.10}$$

相应地有

$$d^2\chi' d^2\chi'' = d^2\chi\, d^2\lambda,\ d^2\eta' d^2\eta'' = d^2\eta d^2\sigma \tag{12.11}$$

那么式(12.9)可以改写为

$$H = \int \frac{d^2\chi\, d^2\lambda d^2\eta d^2\sigma}{4\pi^4} \left|\chi + \frac{\lambda}{2}\right\rangle\left\langle\chi - \frac{\lambda}{2}\right| \left\langle \eta + \frac{\sigma}{2}\right| H \left|\eta - \frac{\sigma}{2}\right\rangle$$

$$\exp\left[-\frac{i}{2}(\lambda\eta^* + \lambda^*\eta + \chi^*\sigma + \chi\sigma^*)\right] \tag{12.12}$$

引入

$$\int \frac{d^2\lambda}{\pi}\left|\chi + \frac{\lambda}{2}\right\rangle\left\langle\chi - \frac{\lambda}{2}\right| \exp\left[-\frac{i}{2}(\lambda\eta^* + \lambda^*\eta)\right] \equiv \Delta(\chi, \eta) \tag{12.13}$$

$$\int \frac{d^2\sigma}{\pi}\left\langle \eta + \frac{\sigma}{2}\right| H \left|\eta - \frac{\sigma}{2}\right\rangle \exp\left[-\frac{i}{2}(\chi^*\sigma + \chi\sigma^*)\right] \equiv h(\chi, \eta) \tag{12.14}$$

则方程(12.12)变为

$$H = \int \frac{d^2\chi\, d^2\eta}{4\pi^2} h(\chi, \eta)\Delta(\chi, \eta) \tag{12.15}$$

由式(12.13)和式(12.7),可知 $H$ 在 $|\chi\rangle$ 表象中的矩阵元为

$$\langle\chi' \mid H \mid \chi''\rangle = \int \frac{d^2\chi\, d^2\eta}{4} h(\chi, \eta) \int \frac{d^2\lambda}{\pi}\delta^2\left(\chi' - \chi - \frac{\lambda}{2}\right)$$

$$\delta^2\left(\chi - \frac{\lambda}{2} - \chi''\right)\exp\left[-\frac{i}{2}(\lambda\eta^* + \lambda^*\eta)\right]$$

$$= \int \frac{d^2\chi\, d^2\eta}{\pi} h(\chi, \eta)\delta^2(\chi'' + \chi' - 2\chi) \times$$

$$\exp\{-i[(\chi' - \chi)\eta^* + (\chi' - \chi)^*\eta]\}$$

$$= \int \frac{d^2\eta}{\pi} h\left(\frac{\chi'' + \chi'}{2}, \eta\right) \exp\{-i[(\chi' - \chi'')\eta^* + (\chi' - \chi'')^* \eta]\} \tag{12.16}$$

设 $t_1$ 时刻系统处于 $|\eta'\rangle$，则在 $t_2$ 时刻处于 $|\eta''\rangle$ 的转换矩阵元为（$H$ 不显含 $t$）

$$\langle \chi'', t'' \mid \chi', t' \rangle = \langle \chi'' \mid \exp[-iH(t'' - t')] \mid \chi' \rangle \tag{12.17}$$

把时间间隔 $t_1$ 到 $t_2$ 分割为 $n+1$ 等份，$\varepsilon(n+1) = (t'' - t')$，$\varepsilon$ 为无穷小量，则利用完备性关系式（12.7）得到

$$\begin{aligned} \langle \chi'', t'' \mid \chi', t' \rangle &= \int \frac{d^2\chi_1 \cdots d^2\chi_n}{\pi^n} \langle \chi'' \mid e^{-i\varepsilon H} \mid \chi_n \rangle \langle \chi_n \mid \cdots \\ &\quad \mid \chi_1 \rangle \langle \chi_1 \mid e^{-i\varepsilon H} \mid \chi' \rangle \\ &= \int \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{d^2\chi_i}{\pi}\right] \prod_{j=1}^{n+1} \langle \chi_j \mid e^{-i\varepsilon H} \mid \chi_{j-1} \rangle \end{aligned} \tag{12.18}$$

式中 $\chi'' = \chi_{n+1}$，$\chi' = \chi_0$，其单项利用式（12.16）可以写成

$$\begin{aligned} \langle \chi_j \mid e^{-i\varepsilon H} \mid \chi_{j-1} \rangle &= \pi\delta^2(\chi_j - \chi_{j-1}) - i\varepsilon \langle \chi_j \mid H \mid \chi_{j-1} \rangle \\ &= \int \frac{d^2\eta_j}{\pi} \exp\{-i[\eta_j^*(\chi_j - \chi_{j-1}) + \eta_j(\chi_j^* - \chi_{j-1}^*)]\} \\ &\quad \left[1 - i\varepsilon h\left(\frac{\chi_j + \chi_{j-1}}{2}, 2\eta_j\right)\right] \\ &= \int \frac{d^2\eta_j}{\pi} \exp\left\{-i[\eta_j^*(\chi_j - \chi_{j-1}) + \eta_j(\chi_j^* - \chi_{j-1}^*)] - \right. \\ &\quad \left. i\varepsilon h\left(\frac{\chi_j + \chi_{j-1}}{2}, 2\eta_j\right)\right\} \end{aligned} \tag{12.19}$$

把它代回式（12.18）就得到在 $|\eta\rangle$ 表象内路径积分形式

$$
\begin{aligned}
&\langle \chi'', t'' \mid \chi', t' \rangle \\
&= \int \prod_t \frac{d^2\chi(t) d^2\eta(t)}{\pi^2} \exp\{i\int_{t'}^{t''} dt[-\dot{\chi}^*(t)\eta(t) - \dot{\chi}(t)\eta^*(t)] - \\
&h(\chi(t), 2\eta(t))\}
\end{aligned}
\tag{12.20}
$$

## 12.3 应用[3]

作为例子，对于量子光学中的常见双模哈密顿量，计算 $h(\chi, \eta)$.

$$
H = (\omega_1 a^\dagger a + \omega_2 b^\dagger b) + g(ab + a^\dagger b^\dagger) + f(a^2 + a^{\dagger 2}) + k(b^2 + b^{\dagger 2})
\tag{12.21}
$$

当保证哈密顿量 $H$ 为厄米的参数 $\omega_1$，$\omega_2$，$g$，$f$，$k$ 取不同的值时，将给出很多特例，所以研究这个哈密顿量是有意义的. 那么先定义

$$
\begin{aligned}
H_1 &= (\omega_1 a^\dagger a + \omega_2 b^\dagger b),\ H_2 = g(ab + a^\dagger b^\dagger) \\
H_3 &= f(a^2 + a^{\dagger 2}),\ H_4 = k(b^2 + b^{\dagger 2})
\end{aligned}
\tag{12.22}
$$

根据式(12.14)首先计算

$$
h_1 \equiv \int \frac{d^2\sigma}{\pi} \exp\left[-\frac{i}{2}(\chi^*\sigma + \chi\sigma^*)\right] \left\langle \eta + \frac{\sigma}{2} \middle| H_1 \middle| \eta - \frac{\sigma}{2} \right\rangle
\tag{12.23}
$$

做代换 $\alpha = \eta - \frac{\sigma}{2}$，给出

$$
h_1 = 4e^{-i(\chi^*\eta + \chi\eta^*)} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \exp[i(\chi^*\alpha + \chi\alpha^*)] \langle 2\eta - \alpha \mid H_1 \mid \alpha \rangle
\tag{12.24}
$$

这里的 $|\alpha\rangle$ 属于 $|\eta\rangle$ 表象，所以满足下面的关系式

$$a^\dagger \mid \alpha\rangle = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\alpha^*}{2}\right)\mid\alpha\rangle,\ a\mid\alpha\rangle = -\left(\frac{\partial}{\partial\alpha^*}-\frac{\alpha}{2}\right)\mid\alpha\rangle$$

$$b^\dagger \mid \alpha\rangle = -\left(\frac{\partial}{\partial\alpha^*}+\frac{\alpha}{2}\right)\mid\alpha\rangle,\ b\mid\alpha\rangle = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{\alpha^*}{2}\right)\mid\alpha\rangle \tag{12.25}$$

则有

$$\begin{aligned}
&(\omega_1 a^\dagger a+\omega_2 b^\dagger b)\mid\alpha\rangle \\
&=\left[-\omega_1\left(\frac{\partial}{\partial\alpha^*}-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\alpha^*}{2}\right)-\omega_2\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{\alpha^*}{2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\alpha^*}+\frac{\alpha}{2}\right)\right]\mid\alpha\rangle \\
&=\left(-\omega_1\frac{\partial^2}{\partial\alpha^*\partial\alpha}-\frac{\omega_1}{2}-\frac{\alpha^*\omega_1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha^*}+\frac{\alpha\omega_1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\omega_1\frac{\mid\alpha\mid^2}{4}-\right. \\
&\quad\left.\omega_2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^*\partial\alpha}-\frac{\omega_2}{2}-\frac{\alpha\omega_2}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\alpha^*\omega_2}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha^*}+\omega_2\frac{\mid\alpha\mid^2}{4}\right)\mid\alpha\rangle \\
&=\left[-(\omega_1+\omega_2)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^*\partial\alpha}+\frac{\alpha(\omega_1-\omega_2)}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{\alpha^*(\omega_1-\omega_2)}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha^*}-\right. \\
&\quad\left.\frac{\omega_1+\omega_2}{2}+(\omega_1+\omega_2)\frac{\mid\alpha\mid^2}{4}\right]\mid\alpha\rangle\equiv\widetilde{H}_1\mid\alpha\rangle
\end{aligned} \tag{12.26}$$

引入

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_1 &= \widetilde{H}_{11}+\widetilde{H}_{12} \\
\widetilde{H}_{11} &= -(\omega_1+\omega_2)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^*\partial\alpha}-\frac{\omega_1+\omega_2}{2}+(\omega_1+\omega_2)\frac{\mid\alpha\mid^2}{4} \\
\widetilde{H}_{12} &= \frac{\alpha(\omega_1-\omega_2)}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{\alpha^*(\omega_1-\omega_2)}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha^*}
\end{aligned} \tag{12.27}$$

将 $\mid\chi=\xi\rangle$ 的完备性关系插入式(12.24)并利用内积

$$\langle\xi\mid\alpha\rangle=\frac{1}{2}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}(\xi\alpha^*+\xi^*\alpha)\right] \tag{12.28}$$

可以得到

$$h_{11}=4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\chi^*\eta+\chi\eta^*)}\iint\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\pi}\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}\exp[\mathrm{i}(\chi^*\alpha+\chi\alpha^*)]\times$$

$$\langle 2\eta-\alpha \mid \xi\rangle\langle\xi \mid \widetilde{H}_{11} \mid \alpha\rangle$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\chi^*\eta+\chi\eta^*)}\iint\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\pi}\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}\exp\{\mathrm{i}(\chi^*\alpha+\chi\alpha^*)+\mathrm{i}[\xi(\eta^*-\alpha^*)+$$

$$\xi^*(\eta-\alpha)]\}\times\left[(\omega_1+\omega_2)\frac{|\alpha|^2+|\xi|^2}{4}-\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right]$$

$$= \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\left[\frac{1}{2}(|\chi|^2+|\eta|^2)-1\right] \tag{12.29}$$

同理也有

$$h_{12} = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\chi^*\eta+\chi\eta^*)}\iint\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\pi}\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}\exp[\mathrm{i}(\chi^*\alpha+\chi\alpha^*)]\times$$

$$\langle 2\eta-\alpha \mid \xi\rangle\langle\xi \mid \widetilde{H}_{12} \mid \alpha\rangle$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\chi^*\eta+\chi\eta^*)}\iint\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\pi}\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}\exp\{\mathrm{i}(\alpha\chi^*+\chi\alpha^*)+\mathrm{i}[\xi(\eta^*-\alpha^*)+$$

$$\xi^*(\eta-\alpha)]\}\times\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha\xi^*-\xi\alpha^*)\right]$$

$$=-\frac{\mathrm{i}}{4}(\omega_1-\omega_2)(\eta\chi^*-\eta^*\chi) \tag{12.30}$$

所以就得到

$$h_1(\chi,\eta) = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\left[\frac{1}{2}(|\chi|^2+\eta^2)-1\right]-$$

$$\frac{\mathrm{i}}{4}(\omega_1-\omega_2)(\chi^*\eta-\chi\eta^*) \tag{12.31}$$

下面求

$$h_2 \equiv \int\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\pi}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}(\chi^*\sigma+\chi\sigma^*)\right]\langle\eta+\frac{\sigma}{2} \mid H_2 \mid \eta-\frac{\sigma}{2}\rangle$$

$$=4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\chi^*\eta+\chi\eta^*)}\int\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}\exp[\mathrm{i}(\chi^*\sigma+\chi\alpha^*)]$$

$$\langle 2\eta-\alpha \mid g(ab+a^\dagger b^\dagger) \mid \alpha\rangle \tag{12.32}$$

从式(12.25)可以得到

$$(ab+a^{\dagger}b^{\dagger})\mid\alpha\rangle=\left(-2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^*\partial\alpha}-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)|\alpha\rangle \quad (12.33)$$

同样地插入 $|\chi=\xi\rangle$ 的完备性关系以及用式(12.33)可以得到

$$\begin{aligned}
h_2 &= 4ge^{-i(\chi^*\eta+\chi\eta^*)}\iint\frac{d^2\xi}{\pi}\frac{d^2\alpha}{\pi}\exp[i(\chi^*\alpha+\chi\alpha^*)] \\
&\quad \langle 2\eta-\alpha\mid\xi\rangle\langle\xi\mid\left(-2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^*\partial\alpha}-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)|\alpha\rangle \\
&= ge^{-i(\chi^*\eta+\chi\eta^*)}\iint\frac{d^2\xi}{\pi}\frac{d^2\alpha}{\pi}\exp\{i(\chi^*\alpha+\chi\alpha^*)+ \\
&\quad i[\xi(\eta^*-\alpha^*)+\xi^*(\eta-\alpha)]\}\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}+\frac{|\xi|^2}{2}\right) \\
&= \frac{g}{2}(|\chi|^2-|\eta|^2) \quad (12.34)
\end{aligned}$$

下面计算 $H_3$，由式(12.25)可以得到

$$\begin{aligned}
(a^2+a^{\dagger 2})\mid\alpha\rangle &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial\alpha^*}-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\alpha^*}-\frac{\alpha}{2}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\alpha^*}{2}\right)\right. \\
&\quad \left.\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\alpha^*}{2}\right)\right]|\alpha\rangle \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^{*2}}+\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha^*}+\alpha^*\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\alpha^{*2}}{2}\right)|\alpha\rangle \\
&\equiv \widetilde{H}_3\mid\alpha\rangle \quad (12.35)
\end{aligned}$$

那么就可以把 $H_3$ 分解成 3 部分

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_{31} &= f\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^{*2}}+\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right), \\
\widetilde{H}_{32} &= f\left(-\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha^*}+\alpha^*\frac{\partial}{\partial\alpha}\right), \\
\widetilde{H}_{33} &= f\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\alpha^{*2}}{2}\right) \quad (12.36)
\end{aligned}$$

考虑到 $\widetilde{H}_{12}$ 和 $\widetilde{H}_{32}$ 的相似性，很容易地可得

$$h_{32}=4fe^{-i(\chi^*\eta+\chi\eta^*)}\iint\frac{d^2\xi}{\pi}\frac{d^2\alpha}{\pi}\exp[i(\chi_\sigma^*+\chi\alpha^*)]\langle 2\eta-\alpha\mid\xi\rangle\times$$

$$\langle\xi\mid\left(-\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha^*}+\alpha^*\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\mid\alpha\rangle$$

$$=-\frac{i}{2}f(\eta^*\chi^*-\eta\chi)\tag{12.37}$$

那么对于 $h_{31}$ 和 $h_{33}$，则有

$$h_{31}=4fe^{-i(\chi^*\eta+\chi\eta^*)}\iint\frac{d^2\xi}{\pi}\frac{d^2\alpha}{\pi}\exp[i(\chi_\sigma^*+\chi\alpha^*)]$$

$$\langle 2\eta-\alpha\mid\xi\rangle\langle\xi\mid\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^{*2}}+\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right)\mid\alpha\rangle$$

$$=\frac{1}{4}fe^{-i(\chi^*\eta+\chi\eta^*)}\iint\frac{d^2\xi}{\pi}\frac{d^2\alpha}{\pi}\exp\{i(\chi_\sigma^*+\chi\alpha^*)+$$

$$i[\xi(\eta^*-\alpha^*)+\xi^*(\eta-\alpha)]\}(-\xi^2-\xi^{*2})$$

$$=-\frac{1}{4}f(\chi^2+\chi^{*2})\tag{12.38}$$

$$h_{33}=4fe^{-i(\chi^*\eta+\chi\eta^*)}\iint\frac{d^2\xi}{\pi}\frac{d^2\alpha}{\pi}\exp[i(\chi^*\alpha+\chi\alpha^*)]$$

$$\langle 2\eta-\alpha\mid\xi\rangle\langle\xi\mid\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\alpha^{*2}}{4}\right)\mid\alpha\rangle$$

$$=\frac{1}{4}fe^{-i(\chi^*\eta+\chi\eta^*)}\iint\frac{d^2\xi}{\pi}\frac{d^2\alpha}{\pi}\exp\{i(\chi^*\alpha+\chi\alpha^*)+$$

$$i[\xi(\eta^*-\alpha^*)+\xi^*(\eta-\alpha)]\}(\alpha^2+\alpha^{*2})$$

$$=\frac{1}{4}f(\eta^2+\eta^{*2})\tag{12.39}$$

所以得到 $h_3$ 为

$$h_3=-\frac{f}{4}(\chi^2+\chi^{*2})-\frac{i}{2}f(\eta^*\chi^*-\eta\chi)+\frac{f}{4}(\eta^2+\eta^{*2})\tag{12.40}$$

最后来计算 $H_4$，从式(12.25)得

$$
\begin{aligned}
&(b^2 + b^{\dagger 2}) \mid \alpha\rangle \\
&= \left[\left(\frac{\partial}{\partial \alpha^*} - \frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \alpha^*} - \frac{\alpha}{2}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\alpha^*}{2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\alpha^*}{2}\right)\right] \mid \alpha\rangle \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha^*} - \alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^{*2}}{2}\right) \mid \alpha\rangle \\
&\equiv \widetilde{H}_4 \mid \alpha\rangle
\end{aligned} \tag{12.41}
$$

将 $\widetilde{H}_4$ 分解为 3 部分

$$
\begin{aligned}
\widetilde{H}_{41} &= k\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\right) = \widetilde{H}_{31} \\
\widetilde{H}_{42} &= k\left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha^*} - \alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) = -\widetilde{H}_{32} \\
\widetilde{H}_{43} &= k\left(\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^{*2}}{2}\right) = \widetilde{H}_{33}
\end{aligned} \tag{12.42}
$$

与计算 $h_3$ 的方法相同，得到 $h_4$

$$
h_4 = -\frac{k}{4}(\chi^2 + \chi^{*2}) + \frac{\mathrm{i}}{2}k(\eta^* \chi^* - \eta \chi) + \frac{k}{4}(\eta^2 + \eta^{*2}) \tag{12.43}
$$

综合式(12.31)、(12.34)、(12.40)、(12.43)，得到 $h(\chi, \eta)$

$$
h(\chi, \eta) = h(\chi, \eta)_1 + h(\chi, \eta)_2 + h(\chi, \eta)_3 + h(\chi, \eta)_4 \tag{12.44}
$$

$$
\begin{aligned}
&h(\chi, \eta) \\
&= \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)\left[\frac{1}{2}(\mid \chi \mid^2 - \mid \eta \mid^2) - 1\right] - \\
&\quad \frac{\mathrm{i}}{4}(\omega_1 - \omega_2)(\eta \chi^* - \eta^* \chi) + \\
&\quad \frac{g}{2}(\mid \chi \mid^2 - \mid \eta \mid^2) - \frac{(f + k)}{4}(\chi^2 + \chi^{*2}) - \\
&\quad \frac{\mathrm{i}}{2}(f - k)(\eta^* \chi^* - \eta \chi) + \frac{(f + k)}{4}(\eta^2 + \eta^{*2})
\end{aligned} \tag{12.45}
$$

下面来计算这个哈密顿量的路径积分，首先根据式(12.45)写下

$$
\begin{aligned}
& h\left(\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2},\ 2\eta_j\right) \\
= & \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\left(\frac{1}{2}\left|\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2}\right|^2+\frac{|2\eta_j|^2}{2}-1\right)-\frac{\mathrm{i}(\omega_1-\omega_2)}{4} \\
& \left[2\eta_j\left(\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2}\right)^*-2\eta_j^*\left(\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2}\right)\right]+\frac{g}{2}\left(\left|\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2}\right|^2-\right. \\
& \left.|2\eta_j|^2\right)-\frac{(f+k)}{4}\left[\left(\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2}\right)^2+\left(\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2}\right)^{*2}\right]-\frac{\mathrm{i}}{2}(f-k) \\
& \left[(2\eta_j)^*\left(\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2}\right)^*-(2\eta_j)\left(\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2}\right)\right]+\frac{(f+k)}{4} \\
& \left[(2\eta_j)^2+(2\eta_j)^{*2}\right]
\end{aligned} \tag{12.46}
$$

将式(12.45)代入式(12.19)可得

$$
\begin{aligned}
& \langle\chi_j \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon H} \mid \chi_{j-1}\rangle \\
= & \Theta(\chi_j,\ \chi_{j-1})\int\frac{\mathrm{d}^2\eta_j}{\pi}\exp\{-\mathrm{i}\varepsilon(\omega_1+\omega_2-2g)\mid\eta_j\mid^2- \\
& \eta_j\left[\mathrm{i}(\chi_j^*-\chi_{j-1}^*)+\frac{\varepsilon}{2}(\omega_1-\omega_2)\left(\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2}\right)^*-\right. \\
& \left.\varepsilon(f-k)\ \frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2}\right]+\eta_j^*\left[-\mathrm{i}(\chi_j-\chi_{j-1})+\frac{\varepsilon}{2}(\omega_1-\omega_2)\times\right. \\
& \left.\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2}-\varepsilon(f-k)\left(\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2}\right)^*\right]-\mathrm{i}\varepsilon(f+k)\eta_j^2- \\
& \mathrm{i}\varepsilon(f+k)\eta_j^{*2}\}
\end{aligned} \tag{12.47}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
& \Theta(\chi_j,\ \chi_{j-1}) \\
= & \exp\left\{-\mathrm{i}\varepsilon\left[-\frac{1}{4}(\omega_1+\omega_2-2g)\left|\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2}\right|^2+\right.\right. \\
& \left.\left.\frac{1}{4}(f+k)\left[\left(\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2}\right)^2+\left(\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2}\right)^{*2}\right]+\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\right]\right\}
\end{aligned} \tag{12.48}
$$

利用积分公式(4.147)得到

$$
\begin{aligned}
&\langle \chi_j \mid e^{-i\varepsilon H} \mid \chi_{j-1} \rangle \\
&= \frac{\Theta(\chi_j, \chi_{j-1})}{\sqrt{-(\omega_1+\omega_2-2g)^2+4(f+k)^2}} \times \\
&\exp\Big\{ \frac{-i\varepsilon}{-(\omega_1+\omega_2-2g)^2+4(f+k)^2} \times \\
&\Big[ (\omega_1+\omega_2-2g) \Big| \frac{\omega_1-\omega_2}{2}\Big(\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2}\Big) - \\
&(f-k)\Big(\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2}\Big)^* - i\frac{\chi_j-\chi_{j-1}}{\varepsilon} \Big|^2 - \\
&\Big[ \frac{i(\chi_j-\chi_{j-1})^*}{\varepsilon} + \frac{\omega_1-\omega_2}{2}\Big(\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2}\Big)^* - \\
&(f-k)\Big(\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2}\Big) \Big](f+k) + \\
&\Big[ \frac{-i(\chi_j-\chi_{j-1})^*}{\varepsilon} + \frac{\omega_1-\omega_2}{2}\Big(\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2}\Big) - (f-k) \times \\
&\Big(\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2}\Big)^* \Big](f+k) \Big] \Big\}
\end{aligned}
\tag{12.49}
$$

记

$$
\begin{aligned}
A &= (\omega_1+\omega_2-2g) \\
B &= -(\omega_1+\omega_2-2g)^2+4(f+k)^2
\end{aligned}
\tag{12.50}
$$

那么可算得 Feynman 转换矩阵元

$$
\begin{aligned}
&\langle \chi_j \mid e^{-i\varepsilon H} \mid \chi_{j-1} \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{B}} \exp\Big\{ i\varepsilon \Big[ -\frac{\omega_1+\omega_2-2g}{4} + \frac{A(\omega_1-\omega_2)^2}{4B} + \frac{A}{B}(f-k)^2 + \\
&\frac{2(\omega_1-\omega_2)(f^2-k^2)}{B} \Big] \Big| \frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2} \Big|^2 - \Big[ -\frac{f+k}{4} + \\
&\frac{A(\omega_1-\omega_2)(f-k)}{2B} + \frac{(f^2-k^2)}{B} + \frac{(\omega_1-\omega_2)(f+k)}{4B} \Big] \times
\end{aligned}
$$

$$\left[\left(\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2}\right)^2+\left(\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2}\right)^{*2}\right]-\mathrm{i}\left[\frac{A}{B}(f-k)+\right.$$

$$\left.\frac{f+k}{B}(\omega_1-\omega_2)+\frac{2(f^2-k^2)}{B}\right]\left(\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2}\right)^*\left(\frac{\chi_j-\chi_{j-1}}{\varepsilon}\right)^*+$$

$$\mathrm{i}\left[\frac{A}{2B}(\omega_1-\omega_2)+\frac{f+k}{B}(\omega_1-\omega_2)+\frac{2(f^2-k^2)}{B}\right]$$

$$\left(\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2}\right)\left(\frac{\chi_j-\chi_{j-1}}{\varepsilon}\right)^*+\frac{\mathrm{i}}{B}(f-k)\left(\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2}\right)\left(\frac{\chi_j-\chi_{j-1}}{\varepsilon}\right)-$$

$$\frac{\mathrm{i}}{2B}(\omega_1-\omega_2)\left(\frac{\chi_j+\chi_{j-1}}{2}\right)^*\left(\frac{\chi_j-\chi_{j-1}}{\varepsilon}\right)+\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)+$$

$$\left.\frac{2}{B}(f+k)\left(\frac{\chi_j-\chi_{j-1}}{2}\right)^{*2}+\frac{A}{B}\left|\frac{\chi_j-\chi_{j-1}}{\varepsilon}\right|^2\right\} \tag{12.51}$$

因此有

$$\langle\chi'',t''\mid\chi',t'\rangle=\int\prod_t\left[\frac{\mathrm{d}^2\chi(t)}{\pi}\right]\exp\left(\mathrm{i}\int_{t'}^{t''}\mathrm{d}tL\right) \tag{12.52}$$

其中的拉格朗日量为

$$L=\left[-\frac{\omega_1+\omega_2-2g}{4}+\frac{A(\omega_1-\omega_2)^2}{4B}+\frac{A}{B}(f-k)^2+\right.$$

$$\left.\frac{2(\omega_1-\omega_2)(f^2-k^2)}{B}\right]|\chi(t)|^2-\left[-\frac{f+k}{4}+\right.$$

$$\left.\frac{A(\omega_1-\omega_2)(f-k)}{2B}+\frac{f^2-k^2}{B}+\frac{(\omega_1-\omega_2)(f+k)}{4B}\right]\times$$

$$[\chi(t)^2+\chi(t)^{*2}]-\mathrm{i}\left[\frac{A(f-k)}{B}+\frac{(\omega_1-\omega_2)(f+k)}{B}+\right.$$

$$\left.\frac{2(f^2-k^2)}{B}\right]\chi(t)^*\dot{\chi}(t)^*+\mathrm{i}\left[\frac{A}{2B}(\omega_1-\omega_2)+\right.$$

$$\left.\frac{(\omega_1-\omega_2)(f+k)}{B}+\frac{2(f^2-k^2)}{B}\right]\chi(t)\dot{\chi}(t)^*+$$

$$\frac{\mathrm{i}(f-k)}{B}\chi(t)\dot{\chi}(t)-\frac{\mathrm{i}(\omega_1-\omega_2)}{2B}\chi(t)^*\dot{\chi}(t)+$$

$$\frac{2(f+k)}{B}\dot{\chi}(t)^{*2}+\frac{A}{B}|\dot{\chi}(t)|^2+\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2} \tag{12.53}$$

作为上面结果的简单例子，考虑在纠缠态表象中非简并参量放大器的路径积分. 非简并参量放大器的哈密顿量为

$$H = \omega(a^{\dagger}a + b^{\dagger}b) + g(ab + a^{\dagger}b^{\dagger}) \tag{12.54}$$

它和式(12.21)相比，$\omega_1 = \omega_2 = \omega$，$f = k = 0$，所以根据式(12.53)得非简并参量放大器的拉格朗日量为

$$L = \omega - \frac{1}{2}(\omega + g)\chi(t)\chi^*(t) - \frac{1}{2(g-\omega)}\dot{\chi}(t)\dot{\chi}^*(t) \tag{12.55}$$

经典的欧拉-拉格朗日方程为

$$\ddot{\chi}^*(t) - (\omega^2 - g^2)\chi^*(t) = 0 \tag{12.56}$$

$$\ddot{\chi}(t) - (\omega^2 - g^2)\chi(t) = 0 \tag{12.57}$$

为了确定方法的正确性，利用海森堡方程和式(12.54)可得

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a^{\dagger} + b) = [a^{\dagger} + b, H] = (g - \omega)(a^{\dagger} - b) \tag{12.58}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(a^{\dagger} + b) = (g - \omega)\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a^{\dagger} - b) = (\omega^2 - g^2)(a^{\dagger} + b) \tag{12.59}$$

考虑到$|\chi\rangle$是$(a^{\dagger} + b)$的本征态，式(12.59)和式(12.57)是一致的，由此可见这种方法的简洁和准确.

## 12.4 三模纠缠态表象$|\rho, \chi_1, \chi_2\rangle$中的路径积分[4]

在7.12节的基础上，本节来讨论三模纠缠态表象中的路径积分.

由式(7.171)，(7.172)以及(7.122)可得$H$在表象$|\rho, \chi_1, \chi_2\rangle$中的矩阵元为

$$
\begin{aligned}
&\langle\rho',\chi_1',\chi_2'|H|\rho'',\chi_1'',\chi_2''\rangle\\
&=\frac{2}{9\pi^3}\iiint\mathrm{d}\bar{p}\mathrm{d}q_{13}\mathrm{d}q_{123}\iiint\mathrm{d}\bar{q}\mathrm{d}p_{13}\mathrm{d}p_{123}h(\bar{p},q_{13},q_{123};\bar{q},p_{13},\\
&\quad p_{123})\times\iiint\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\chi_1\mathrm{d}\chi_2\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{3}\bar{q}\rho-\mathrm{i}p_{13}\chi_1-\frac{2\mathrm{i}}{3}p_{123}\chi_2\right)\\
&\quad\delta(\bar{p}-\rho-\rho')\delta(q_{13}-\chi_1-\chi_1')\times\delta(q_{123}-\chi_2-\chi_2')\\
&\quad\delta(\bar{p}+\rho-\rho'')\delta(q_{13}+\chi_1-\chi_1'')\delta(q_{123}+\chi_2-\chi_2'')\\
&=\frac{8}{\pi^3}\iiint\mathrm{d}\bar{q}\mathrm{d}p_{13}\mathrm{d}p_{123}h\left(\frac{\rho'+\rho''}{2},\frac{\chi_1+\chi_1''}{2},\frac{\chi_2+\chi_2''}{2};\right.\\
&\quad\left.6\bar{q},2p_{13},3p_{123}\right)\times\exp[\mathrm{i}\bar{q}(\rho''-\rho')-\mathrm{i}p_{13}(\chi_1''-\chi_1)-\\
&\quad\mathrm{i}p_{123}(\chi_2''-\chi_2)]
\end{aligned}
\tag{12.60}
$$

在海森堡图像中，求初始时刻 $t'$ 从态 $|\rho',\chi_1',\chi_2'\rangle$ 到末了时刻 $t''$ 处于态 $|\rho'',\chi_1'',\chi_2''\rangle$ 的转换矩阵元

$$
\begin{aligned}
&\langle\rho'',\chi_1'',\chi_2'',t''|\rho',\chi_1',\chi_2',t'\rangle\\
&=\langle\rho'',\chi_1'',\chi_2''|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t''-t')}|\rho',\chi_1',\chi_2'\rangle
\end{aligned}
\tag{12.61}
$$

将 $t''-t'$ 分成 $n+1$ 等份，即 $\varepsilon(n+1)=t''-t'$，$\varepsilon$ 为无穷小量，并利用态 $|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle$ 的完备性关系可得

$$
\begin{aligned}
&\langle\rho'',\chi_1'',\chi_2'',t''|\rho',\chi_1',\chi_2',t'\rangle\\
&=\iiint\cdots\iiint\mathrm{d}\rho^1\mathrm{d}\chi_1^1\mathrm{d}\chi_2^1\cdots\mathrm{d}\rho^n\mathrm{d}\chi_1^n\mathrm{d}\chi_2^n\langle\rho'',\chi_1'',\chi_2''|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon H}\\
&\quad|\rho^n,\chi_1^n,\chi_2^n\rangle\langle\rho^n,\chi_1^n,\chi_2^n|\cdots|\rho^1,\chi_1^1,\chi_2^1\rangle\langle\rho^1,\chi_1^1,\chi_2^1|\\
&\quad\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon H}|\rho',\chi_1',\chi_2'\rangle\\
&=\iiint\prod_{i=1}^{n}[\mathrm{d}\rho^i\mathrm{d}\chi_1^i\mathrm{d}\chi_2^i]\prod_{j=1}^{n+1}\langle\rho^j,\chi_1^j,\chi_2^j|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon H}|\rho^{j-1},\chi_1^{j-1},\chi_2^{j-1}\rangle
\end{aligned}
\tag{12.62}
$$

其中

$$\rho'' = \rho^{n+1},\ \chi''_1 = \chi_1^{n+1},\ \chi''_2 = \chi_2^{n+1};\ \rho' = \rho^0,\ \chi'_1 = \chi_1^0,\ \chi'_2 = \chi_2^0 \tag{12.63}$$

利用式(12.60)计算其中的单项( $\varepsilon' \equiv 64\varepsilon$ 仍然是无穷小量)

$$\begin{aligned}
&\langle \rho^j,\ \chi_1^j,\ \chi_2^j \mid \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon H} \mid \rho^{j-1},\ \chi_1^{j-1},\ \chi_2^{j-1}\rangle \\
\approx\ &\delta(\rho^{j-1}-\rho^j)\delta(\chi_1^{j-1}-\chi_1^j)\delta(\chi_2^{j-1}-\chi_2^j) - \mathrm{i}\varepsilon\langle \rho^j,\ \chi_1^j,\ \chi_2^j \mid \\
&H \mid \rho^{j-1},\ \chi_1^{j-1},\ \chi_2^{j-1}\rangle \\
=\ &\iiint \frac{\mathrm{d}\bar{q}^j\,\mathrm{d}p_{13}^j\,\mathrm{d}p_{123}^j}{(2\pi)^3}\exp[\mathrm{i}\bar{q}^j(\rho^{j-1}-\rho^j) - \mathrm{i}p_{13}^j(\chi_1^{j-1}+\chi_1^j) - \\
&\mathrm{i}p_{123}^j(\chi_2^{j-1}+\chi_2^j)] - \mathrm{i}\varepsilon'\iiint \frac{\mathrm{d}\bar{q}^j\,\mathrm{d}p_{13}^j\,\mathrm{d}p_{123}^j}{(2\pi)^3} h\Big(\frac{\rho^{j-1}+\rho^j}{2}, \\
&\frac{\chi_1^{j-1}+\chi_1^j}{2},\ \frac{\chi_2^{j-1}+\chi_2^j}{2};\ 6\bar{q}^j,\ 2p_{13}^j,\ 3p_{123}^j\Big) \times \exp[\mathrm{i}\bar{q}^j \\
&(\rho^{j-1}-\rho^j) - \mathrm{i}p_{13}^j(\chi_1^{j-1}+\chi_1^j) - \mathrm{i}p_{123}^j(\chi_2^{j-1}+\chi_2^j)] \\
=\ &\iiint \frac{\mathrm{d}\bar{q}^j\,\mathrm{d}p_{13}^j\,\mathrm{d}p_{123}^j}{(2\pi)^3}\exp\Big[\mathrm{i}\bar{q}^j(\rho^{j-1}-\rho^j) - \mathrm{i}p_{13}^j(\chi_1^{j-1} + \\
&\chi_1^j) - \mathrm{i}p_{123}^j(\chi_2^{j-1}+\chi_2^j) - \mathrm{i}\varepsilon' h\Big(\frac{\rho^{j-1}+\rho^j}{2},\ \frac{\chi_1^{j-1}+\chi_1^j}{2}, \\
&\frac{\chi_2^{j-1}+\chi_2^j}{2};\ 6\bar{q}^j,\ 2p_{13}^j,\ 3p_{123}^j\Big)\Big]
\end{aligned} \tag{12.64}$$

将式(12.64)代入式(12.62)并做代换

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{n}[\mathrm{d}\rho^i\,\mathrm{d}\chi_1^i\,\mathrm{d}\chi_2^i] \Rightarrow \prod_t[\mathrm{d}\rho(t)\,\mathrm{d}\chi_1(t)\,\mathrm{d}\chi_2(t)] \\
&\prod_{j=1}^{n+1}[\mathrm{d}\bar{q}^j\,\mathrm{d}p_{13}^j\,\mathrm{d}p_{123}^j] \Rightarrow \prod_t[\mathrm{d}\bar{q}(t)\,\mathrm{d}p_{13}(t)\,\mathrm{d}p_{123}(t)]
\end{aligned} \tag{12.65}$$

可得 Feynman 路径积分在三模纠缠态表象中的表达形式

$$\begin{aligned}
&\langle \rho'',\ \chi''_1,\ \chi''_2,\ t'' \mid \rho',\ \chi'_1,\ \chi'_2,\ t'\rangle \\
&= \iiint \prod_t \frac{\mathrm{d}\bar{q}(t)\,\mathrm{d}p_{13}(t)\,\mathrm{d}p_{123}(t)}{(2\pi)^3}\mathrm{d}\rho(t)\,\mathrm{d}\chi_1(t)\,\mathrm{d}\chi_2(t) \times
\end{aligned}$$

$$\exp\{\mathrm{i}\int_{t'}^{t''}\mathrm{d}t[\bar{q}(t)\dot{p}(t)-p_{13}(t)\dot{\chi}_1(t)-p_{123}(t)\dot{\chi}_2(t)-$$
$$h(\rho(t),\ \chi_1(t),\ \chi_2(t);\ 6\bar{q}(t),\ 2p_{13}(t),\ 3p_{123}(t))]\} \tag{12.66}$$

# 参考文献


[1] Fan Hongyi, Ruan Tunan. General holomorphic functional integral and its evolution to the Feynman kernel [J]. Commun. Theor. Phys., 1984,3:443-456.

[2] Fan Hongyi, Li Chao, Liu Qiuyu, Alfred Wünsche. Path Integral Formalism for Nondegenerate Parametric Amplifiers in Entangled State Representation [J]. Commun. Theor. Phys., 2005,43:998-1002.

[3] Wang Jisuo, Meng Xiangguo, Feng Jian, Gao Yunfeng. Establishing path integral in the entangled state representation for Hamiltonians in quantum optics [J]. Chin. Phys., 2007,16:0023.

[4] Lv Cuihong, Fan Hongyi. New two mutually conjugate tripartite entangled state representations: definition and application [J]. to be published.

# 第 13 章　费米系统的量子相空间理论

前面讨论的都是玻色系统的量子相空间，费米系统的算符理论对于固体物理、量子统计的发展也是十分重要的，我们有必要将算符理论从玻色系统推广到费米系统. 本章讨论费米系统的 Weyl - Wigner 量子化方案，和玻色算符的情况类似，可以证明，在相似变换下，费米子算符的 Weyl 编序也是序不变的. 通过对比，我们看到玻色系统和费米系统在这方面的超对称. 作为应用，还将构建一个广义费米子压缩态.

## 13.1　费米系统的相干态表象和 IWOP 技术

前面章节用到的都是针对玻色算符的 IWOP 积分技术，那么，对于费米系统是否也有相应的 IWOP 技术呢？为此先回忆用 Grassmann 数构造的费米子相干态.

用 $f$ 与 $f^{\dagger}$ 分别代表费米子湮灭算符和产生算符，它们满足反对易关系[1]：

$$\{f,\ f^{\dagger}\}=1,\ f^{2}=0,\ f^{\dagger 2}=0 \tag{13.1}$$

费米子真空态用 $|0\rangle$ 表示，则 $f^{\dagger}|0\rangle=|1\rangle$，$f|0\rangle=0$，$f^{\dagger}|1\rangle=0$. 利用 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的矩阵表示

$$|0\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ |1\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{13.2}$$

可知

$$f = |0\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ f^{\dagger} = |1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{13.3}$$

记湮灭算符的本征矢为$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$,则本征方程为

$$f\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}\alpha \tag{13.4}$$

由此给出

$$e_2 = e_1\alpha\ ,\quad 0 = e_2\alpha \tag{13.5}$$

其中第二个方程或是取 Delta 函数形式的解,或是取 $e_2 = \alpha$, $\alpha^2 = 0$, $\alpha$ 称为 Grassmann 数. 这种特殊的数与费米子的反对易关系相适应,所以也称为反对易 $c$ 数. 因此,当 $e_2 = \alpha$ 时,$e_1 = 1$, 本征矢就是

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\alpha = |0\rangle + |1\rangle\alpha = \mathrm{e}^{f^{\dagger}\alpha}\ |0\rangle \tag{13.6}$$

多个模式的 Grassmann 数 $\alpha_i$ 有性质

$$\alpha_i^2 = 0,\ \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0 \tag{13.7}$$

并且满足积分公式

$$\int \mathrm{d}\alpha_i = 0,\ \int \mathrm{d}\alpha_i\alpha_i = 0,\ \int \mathrm{d}\bar{\alpha}_i = 0,\ \int \mathrm{d}\bar{\alpha}_i\bar{\alpha}_i = 0 \tag{13.8}$$

$$\begin{aligned} &\int \prod_{i=1} \mathrm{d}\bar{\alpha}_i \mathrm{d}\alpha_i \exp\left[-\sum_{ij}\bar{\alpha}_i A_{ij}\alpha_i + \sum_i (\bar{\alpha}_i\eta_i + \bar{\eta}_i\alpha_i)\right] \\ &= \det\boldsymbol{A}\exp\left[\sum_{ij}\bar{\eta}_i (A^{-1})_{ij}\eta_j\right] \end{aligned} \tag{13.9}$$

这里 $\eta_i$, $\bar{\eta}_i$ 也是 Grassmann 数,而 $\boldsymbol{A}$ 是一个复值矩阵.

归一化的费米子相干态是可以很自洽地定义的,其形式如同玻色子相干态,即

$$\begin{aligned}|\alpha_i\rangle &= \exp\left[-\frac{1}{2}\bar{\alpha}_i\alpha_i + f_i^\dagger \alpha_i\right]|0\rangle_i \\ &= \exp[f_i^\dagger \alpha_i - \bar{\alpha}_i f_i]|0\rangle_i \\ &\equiv D(\alpha_i)|0\rangle_i\end{aligned} \tag{13.10}$$

满足本征值方程

$$f_i|\alpha_i\rangle = |\alpha_i\rangle\alpha_i \tag{13.11}$$

自洽性要求 $\alpha_i$ 与 $f_i(f_i^\dagger)$反对易，故有

$$\langle\alpha_i| = {}_i\langle 0|\exp\left[-\frac{1}{2}\bar{\alpha}_i\alpha_i + \bar{\alpha}_i f_i\right] \tag{13.12}$$

现在对费米子系统（费米算符与 Grassmann 数）引入 IWOP 技术[2,3]，仍以：：标记正规乘积，则它有以下性质：

(1) 在正规乘积记号：：内，任何两个费米算符是反对易的，即显示为反对易 $c$ 数的行为.

(2) 可以对：：内部的非算符变量积分，也包括对 Grassmann 数的积分.

(3) 一个"Grassmann 数-费米算符对"(GFOP)与另一个 GFOP 在：：内部是对易的.

(4) 费米子真空投影算符的正规乘积形式是

$$|0\rangle\langle 0| = :\exp(-f^\dagger f): \tag{13.13}$$

事实上，由泡利原理 $|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = 1$ 和 $f = |0\rangle\langle 1|$，$f^\dagger = |1\rangle\langle 0|$，易见

$$|0\rangle\langle 0| = 1 - |1\rangle\langle 1| = 1 - f^\dagger f = :\exp(-f^\dagger f): \tag{13.14}$$

由以上性质，可把费米子相干态的完备性写作

$$\begin{aligned}\int d\bar{\alpha}_i d\alpha_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| &= \int d\bar{\alpha}_i d\alpha_i :\exp[\bar{\alpha}_i f_i + f_i^\dagger\alpha_i - \bar{\alpha}_i\alpha_i - f_i^\dagger f_i]: \\ &= :\exp[f_i^\dagger f_i - f_i^\dagger f_i]: = 1\end{aligned} \tag{13.15}$$

或者简写为

$$\int d\bar{\alpha}_i d\alpha_i \mid \alpha_i\rangle\langle\alpha_i \mid = \int d\bar{\alpha}_i d\alpha_i : \exp[-(\bar{\alpha}_i - f_i^\dagger)(\alpha_i - f_i)] :$$
$$= \int d\bar{\alpha}_i d\alpha \exp(-\bar{\alpha}_i\alpha_i) = 1 \tag{13.16}$$

## 13.2 费米系统的 Wigner 算符[4]

类似于玻色系统的情形，在精确到差一个不重要的相因子(−1)的情况下，引入费米系统的 Wigner 算符($\eta$ 为 Grassmann 数)

$$\Delta_f(\xi, \bar{\xi}) = \int d\eta d\bar{\eta} \exp[\eta(f^\dagger - \bar{\xi}) - \bar{\eta}(f - \xi)] \tag{13.17}$$

利用费米系统的 IWOP 技术、Baker - Hausdorff 公式以及积分公式(13.9)可得 $\Delta_f(\xi, \bar{\xi})$ 的正规乘积形式

$$\Delta_f(\xi, \bar{\xi}) = : \int d\eta d\bar{\eta} \exp\left[-\frac{\eta\bar{\eta}}{2} + \eta(f^\dagger - \bar{\xi}) - \bar{\eta}(f - \xi)\right] :$$
$$= : \int d\eta d\bar{\eta} \exp\left[\frac{1}{2}(\eta, \bar{\eta})\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta \\ \bar{\eta}\end{pmatrix} + \right.$$
$$\left. (-f^\dagger + \bar{\xi}, f - \xi)\begin{pmatrix}\eta \\ \bar{\eta}\end{pmatrix}\right] :$$
$$= \frac{1}{2} : \exp[-2(f^\dagger - \bar{\xi})(f - \xi)] : \tag{13.18}$$

在 Fock 空间的矩阵元为

$$\langle 0 \mid \Delta_f(\xi, \bar{\xi}) \mid 0\rangle = \frac{1}{2} - \bar{\xi}\xi, \ \langle 0 \mid \Delta_f(\xi, \bar{\xi}) \mid 1\rangle = \bar{\xi} \tag{13.19}$$

$$\langle 1 \mid \Delta_f(\xi, \bar{\xi}) \mid 0\rangle = \xi,\ \langle 1 \mid \Delta_f(\xi, \bar{\xi}) \mid 1\rangle = -\frac{1}{2} - \bar{\xi}\xi \tag{13.20}$$

写成矩阵形式

$$\Delta_f(\xi, \bar{\xi}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \bar{\xi}\xi & \bar{\xi} \\ \xi & -\frac{1}{2} - \bar{\xi}\xi \end{pmatrix} \tag{13.21}$$

可以看出它的对角矩阵元呈玻色性，非对角矩阵元呈费米性，所以式(13.21)是一个超矩阵，用 Str 表示对超矩阵求迹，那么有 $\mathrm{Str}\Delta_f(\xi, \bar{\xi}) = 1$. 而且，可以得到

$$\mathrm{Str}[\Delta_f(\xi, \bar{\xi})\Delta_f(\eta, \bar{\eta})] = -(\bar{\eta} - \bar{\xi})(\eta - \xi) \tag{13.22}$$

在费米子相干态表象，$\Delta_f(\xi, \bar{\xi})$可以表示为($\xi$是 Grassmann 数)

$$\Delta_f(\xi, \bar{\xi}) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\bar{\alpha}\mathrm{d}\alpha \mid \xi + \alpha\rangle\langle \xi - \alpha \mid \exp(\alpha\bar{\xi} - \xi\bar{\alpha}) \tag{13.23}$$

根据 IWOP 技术，可得其正规乘积形式

$$\begin{aligned} \Delta_f(\xi, \bar{\xi}) &= \int \frac{\mathrm{d}\bar{\alpha}\mathrm{d}\alpha}{2} : \exp(-\bar{\alpha}\alpha + f^{\dagger}(\xi + \alpha) + (\bar{\xi} - \bar{\alpha})f + \\ &\quad \alpha\bar{\xi} - \xi\bar{\alpha} - \bar{\xi}\xi - f^{\dagger}f) : \\ &= \frac{1}{2} : \exp[-2(f^{\dagger} - \bar{\xi})(f - \xi)] : \end{aligned} \tag{13.24}$$

## 13.3 费米系统的赝 Weyl 对应[5, 6]

利用费米子的 Wigner 算符，引入费米系统的 Weyl 对应

$$K(f, f^{\dagger}) = \int \mathrm{d}\bar{\xi}\mathrm{d}\xi k(\xi, \bar{\xi})\Delta_f(\xi, \bar{\xi}) \tag{13.25}$$

$k(\xi, \bar{\xi})$是费米子算符函数 $K(f^\dagger, f)$的赝经典 Weyl 对应. 由式(13.22)知,式(13.25)的反变换为

$$k(\xi, \bar{\xi}) = \mathrm{Str}[\Delta_f(\xi, \bar{\xi})K(f^\dagger, f)] \tag{13.26}$$

费米算符的 Weyl 编序(用 $\vdots\ \vdots$ 标记)可以定义为

$$\exp[\eta(f^\dagger - \bar{\xi}) - \bar{\eta}(f - \xi)] = \vdots \exp[\eta(f^\dagger - \bar{\xi}) - \bar{\eta}(f - \xi)] \vdots \tag{13.27}$$

我们知道玻色算符有 Weyl 编序算符内的积分技术(IWWP 技术),同样,对于费米系统我们也引入 IWWP 技术,其性质如下:

(1) 任意两个费米算符在 Weyl 编序记号内是反对易的,即可以像 Grassmann 数一样交换.

(2) "Grassmann 数-费米算符"(GFOP)在 $\vdots\ \vdots$ 内部是对易的.

(3) 在 $\vdots\ \vdots$ 内,由于所有的 GFOP 是对易的,所以可以看作是 $c$ 常数进行积分运算.

所以式(13.17)可以直接积分得到

$$\Delta_f(\xi, \bar{\xi}) = \vdots \delta(f^\dagger - \bar{\xi})\delta(f - \xi) \vdots \tag{13.28}$$

那么就有

$$\vdots K(f, f^\dagger) \vdots = \int \mathrm{d}\bar{\xi}\mathrm{d}\xi K(\xi, \bar{\xi})\Delta_f(\xi, \bar{\xi}) \tag{13.29}$$

就是说 Weyl 编序好的费米算符的伪经典对应函数可以直接做代换 $f \to \xi$, $f^\dagger \to \bar{\xi}$ 得到. 如有一个例子,投影算符$|\alpha\rangle\langle\alpha|$的赝经典对应为

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Str}[\Delta_f(\xi,\bar{\xi})\mid\alpha\rangle\langle\alpha\mid]\\
&=\langle\alpha\mid\Delta_f(\xi,\bar{\xi})\mid\alpha\rangle\\
&=\frac{1}{2}\langle\alpha\mid :\exp[-2(f^\dagger-\bar{\xi})(f-\xi)]:\mid\alpha\rangle\\
&=\frac{1}{2}\exp[-2(\bar{\alpha}-\bar{\xi})(\alpha-\xi)]
\end{aligned}\tag{13.30}
$$

式(13.30)代入到式(13.29)，给出$|\alpha\rangle\langle\alpha|$的 Weyl 编序

$$
\begin{aligned}
\mid\alpha\rangle\langle\alpha\mid&=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}\bar{\xi}\mathrm{d}\xi\exp[-2(\bar{\alpha}-\bar{\xi})(\alpha-\xi)]\,\vdots\,\delta(f^\dagger-\bar{\xi})\delta(f-\xi)\,\vdots\\
&=\frac{1}{2}\,\vdots\,\exp[-2(f^\dagger-\bar{\alpha})(f-\alpha)]\,\vdots
\end{aligned}\tag{13.31}
$$

比较式(13.31)和式(13.24)，它们的形式一样，但意义不同，前者是 Weyl 编序展开，后者是正规乘积形式. 当 $\alpha=0$ 时，我们给出真空投影算符$|0\rangle\langle 0|$的 Weyl 编序形式

$$
\mid 0\rangle\langle 0\mid=\frac{1}{2}\,\vdots\,\exp(-2f^\dagger f)\,\vdots\tag{13.32}
$$

这可以作为 IWWP 技术的第(4)条性质.

## 13.4 费米算符 Weyl 编序在相似变换下的序不变性[7]

### 13.4.1 费米子相似变换和经典 SO(2n)矩阵的对应

费米子相似变换为($W$ 为算符)

$$
WfW^{-1}=fP+f^\dagger L,\ Wf^\dagger W^{-1}=f^\dagger Q+fN\tag{13.33}
$$

$f$ 是多模费米子湮灭算符，$f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$，其中系数 $Q$，$N$，$P$ 和 $L$ 都是 $n\times n$ 的复矩阵. 注意到 $f^\dagger Q+fN$ 和 $fP+f^\dagger L$ 不是互为厄米共轭的，引入

$$F = (f^{\dagger}, f), \ F^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} f^{\dagger\mathrm{T}} \\ f^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \tag{13.34}$$

那么反对易关系 $\{f_i, f_j^{\dagger}\} = \delta_{ij}$ 可以被写为

$$\{F^{\mathrm{T}}, F\}_{2n\times 2n} \equiv \{F_i^{\mathrm{T}}, F_j\}_{2n\times 2n} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & 0 \end{pmatrix}_{2n\times 2n} \tag{13.35}$$

式(13.33)也将化为很简单的形式

$$F' \equiv WFW^{-1} = FM, \ M = \begin{pmatrix} Q & L \\ N & P \end{pmatrix} \tag{13.36}$$

下面证明变换矩阵可以写为如下形式($\boldsymbol{\Omega}$ 是 SO($2n$)转动矩阵)

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\Omega} \tag{13.37}$$

由于相似变换下反对易关系保持不变,有

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & 0 \end{pmatrix}_{2n\times 2n} &= \{F^{\mathrm{T}}, F\}_{2n\times 2n} = \{F'^{\mathrm{T}}, F'\} = \{\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} F^{\mathrm{T}}, F\boldsymbol{M}\} \\ &= \Big( \sum_{k,\,l=1}^{2n} \boldsymbol{M}_{ik}^{\mathrm{T}} \{F^{\mathrm{T}}, F\}_{kl} \boldsymbol{M}_{lj} \Big)_{2n\times 2n} \\ &= \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} \{F^{\mathrm{T}}, F\} \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{M} \end{aligned} \tag{13.38}$$

如果定义 $\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{M} = \boldsymbol{\Omega}$, 则有 $(\boldsymbol{\Omega}^{-1})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Omega}$ 或者 $\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{I}_{2n\times 2n}$, 可以看出 $\boldsymbol{\Omega}$ 是一个 SO($2n$)转动矩阵. 式(13.38)可以写成更明显的形式

$$Q\widetilde{L} = -L\widetilde{Q}, \ N\widetilde{P} = -P\widetilde{N}, \ Q\widetilde{P} + L\widetilde{N} = I, \ P\widetilde{Q} + N\widetilde{L} = I \tag{13.39}$$

$$\widetilde{Q}N = -\widetilde{N}Q, \ \widetilde{L}P = -\widetilde{P}L, \ \widetilde{Q}P + \widetilde{N}L = I, \ \widetilde{P}Q + \widetilde{L}N = I \tag{13.40}$$

例如当 $W = e^{-\beta H}$ 时，费米子哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2}(f^{\dagger},\ f)\Xi\begin{pmatrix} f^{\dagger T} \\ f^{T} \end{pmatrix} \tag{13.41}$$

其中

$$\Xi \equiv \begin{pmatrix} G & S \\ -S^{T} & K \end{pmatrix},\ G^{T} = -G,\ K^{T} = -K \tag{13.42}$$

保证了哈密顿量的厄米性. 由算符公式

$$[AB,\ C] = A\{B,\ C\} - \{A,\ C\}B \tag{13.43}$$

给出

$$[f^{\dagger}Gf^{\dagger T},\ f_i] = \Big[\sum_{r,\ s=1}^{n} f_r^{\dagger} G_{rs} f_s^{\dagger},\ f_i\Big] = 2\sum_{r=1}^{n} f_r^{\dagger} G_{ri} \tag{13.44}$$

和

$$\begin{aligned} [f^{\dagger}Sf^{T},\ f_i] &= -\sum_{r=1}^{n} f_r S_{ir}, \\ [-fS^{T}f^{\dagger T},\ f_i] &= -\sum_{r=1}^{n} f_r S_{ir} \end{aligned} \tag{13.45}$$

从式(13.41)得到

$$\begin{aligned} [H,\ f_i] &= \sum_{r=1}^{n}(f_r^{\dagger} G_{ri} - f_r S_{ir}) \\ [H,\ f_i^{\dagger}] &= \sum_{r=1}^{n}(f_r^{\dagger} S_{ri} + f_r K_{ri}) \\ [H,\ F] &= F\Xi\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{13.46}$$

因此根据 Baker－Hausdorff 公式得到

$$\exp[-\beta H]F\exp[\beta H]=F\exp\left[-\beta\Xi\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}\right] \quad (13.47)$$

比较式(13.47)和式(13.36)可以认定

$$\exp\left[-\beta\Xi\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}Q & L\\ N & P\end{pmatrix} \quad (13.48)$$

### 13.4.2 相似变换下费米子算符 Weyl 编序的序不变性

$K(f, f^{\dagger})$是多模费米子算符函数,它的 Weyl 编序为

$$K(f, f^{\dagger})=\vdots\, k(f, f^{\dagger})\,\vdots \quad (13.49)$$

则在式(13.33)决定的多模相似变换 $W$ 下,存在关系

$$\begin{aligned}WK(f, f^{\dagger})W^{-1}&=K(fP+f^{\dagger}L, fN+f^{\dagger}Q)\\&=\vdots\, k(fP+f^{\dagger}L, fN+f^{\dagger}Q)\,\vdots\end{aligned} \quad (13.50)$$

下面证明之.

记 $n$ 模的费米子 Wigner 算符

$$\Delta_f^n(\xi, \bar{\xi})=\int\Big(\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}\bar{\eta}_i\mathrm{d}\eta_i\Big)\exp[\eta(f^{\dagger}-\bar{\xi})^{\mathrm{T}}-\bar{\eta}(f-\xi)^{\mathrm{T}}] \quad (13.51)$$

其中

$$\eta=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n), \quad \xi=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \quad (13.52)$$

利用 Baker - Hausdorff 公式和

$$\begin{aligned}&[(\eta Q^{\mathrm{T}}-\bar{\eta}L^{\mathrm{T}})f^{\dagger\mathrm{T}}, (\eta N^{\mathrm{T}}-\bar{\eta}P^{\mathrm{T}})f^{\mathrm{T}}]\\&=-(\eta Q^{\mathrm{T}}-\bar{\eta}L^{\mathrm{T}})(N\eta^{\mathrm{T}}-P\bar{\eta}^{\mathrm{T}})\end{aligned} \quad (13.53)$$

式(13.51)在 $W$ 的作用下给出

$$
\begin{aligned}
&W\Delta_f^n(\xi,\bar{\xi})W^{-1}\\
&=\int\Big(\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}\bar{\eta}_i\mathrm{d}\eta_i\Big)\exp[(\eta Q^{\mathrm{T}}-\bar{\eta}L^{\mathrm{T}})f^{\dagger\mathrm{T}}+(\eta N^{\mathrm{T}}-\\
&\quad\bar{\eta}P^{\mathrm{T}})f^{\mathrm{T}}-\eta\bar{\xi}^{\mathrm{T}}-\bar{\eta}\xi^{\mathrm{T}}]\\
&=:\int\Big(\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}\bar{\eta}_i\mathrm{d}\eta_i\Big)\exp\Big[\frac{1}{2}(\eta Q^{\mathrm{T}}-\bar{\eta}L^{\mathrm{T}})(N\eta^{\mathrm{T}}-P\bar{\eta}^{\mathrm{T}})+\\
&\quad(\eta Q^{\mathrm{T}}-\bar{\eta}L^{\mathrm{T}})f^{\dagger\mathrm{T}}+(\eta N^{\mathrm{T}}-\bar{\eta}P^{\mathrm{T}})f^{\mathrm{T}}-\eta\bar{\xi}^{\mathrm{T}}+\bar{\eta}\xi^{\mathrm{T}}\Big]:
\end{aligned}
\tag{13.54}
$$

记

$$\eta Q^{\mathrm{T}}-\bar{\eta}L^{\mathrm{T}}=\alpha,\ \eta N^{\mathrm{T}}-\bar{\eta}P^{\mathrm{T}}=-\bar{\alpha} \tag{13.55}$$

则有

$$(\alpha,\bar{\alpha})=(\eta,\bar{\eta})\begin{pmatrix}Q^{\mathrm{T}} & -N^{\mathrm{T}}\\ -L^{\mathrm{T}} & P^{\mathrm{T}}\end{pmatrix} \tag{13.56}$$

从式(13.39)和式(13.40)有

$$\begin{pmatrix}Q^{\mathrm{T}} & -N^{\mathrm{T}}\\ -L^{\mathrm{T}} & P^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}P & -N\\ -L & Q\end{pmatrix} \tag{13.57}$$

由行列式公式

$$\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\det A\det(D-CA^{-1}B) \tag{13.58}$$

看到

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix}Q^{\mathrm{T}} & -N^{\mathrm{T}}\\ -L^{\mathrm{T}} & P^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}&=\det Q^{\mathrm{T}}\det[P^{\mathrm{T}}-L^{\mathrm{T}}(Q^{\mathrm{T}})^{-1}N^{\mathrm{T}}]\\
&=\det Q\det(P^{\mathrm{T}}+Q^{-1}LN^{-1})\\
&=\det Q\det[P^{\mathrm{T}}+Q^{-1}(1-QP^{\mathrm{T}})]\\
&=1
\end{aligned}
\tag{13.59}
$$

利用积分公式可将式(13.54)化为

$$
\begin{aligned}
&W\Delta_f^n(\xi,\bar{\xi})W^{-1}\\
&=:\int\Big(\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}\bar{\alpha}_i\mathrm{d}\alpha_i\Big)\exp\Big[-\frac{1}{2}\alpha\bar{\alpha}^{\mathrm{T}}+\alpha f^{\dagger\mathrm{T}}-\bar{\alpha}f^{\mathrm{T}}-(\alpha P-\bar{\alpha}L)\bar{\xi}^{\mathrm{T}}+\\
&\quad(-\alpha N+\bar{\alpha}Q)\xi^{\mathrm{T}}\Big]:\\
&=:\int\Big(\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}\bar{\alpha}_i\mathrm{d}\alpha_i\Big)\exp\left[\frac{1}{2}(\alpha,\bar{\alpha})\begin{pmatrix}0 & -\frac{I_n}{2}\\ \frac{I_n}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^{\mathrm{T}}\\ \bar{\alpha}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}+\right.\\
&\quad\left.(-f^{\dagger}+\bar{\xi}P^{\mathrm{T}}+\xi N^{\mathrm{T}}\quad f-\bar{\xi}L^{\mathrm{T}}-\xi Q^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}\alpha^{\mathrm{T}}\\ \bar{\alpha}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\right]:\\
&=\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n}:\exp\left[\frac{1}{2}(-f^{\dagger}+\bar{\xi}P^{\mathrm{T}}+\xi N^{\mathrm{T}},\ f-\bar{\xi}L^{\mathrm{T}}-\xi Q^{\mathrm{T}})\times\right.\\
&\quad\left.\begin{pmatrix}2I_n & 0\\ 0 & -2I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f^{\mathrm{T}}-L\bar{\xi}^{\mathrm{T}}-Q\xi^{\mathrm{T}}\\ -f^{\dagger\mathrm{T}}+P\bar{\xi}^{\mathrm{T}}+N\xi^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\right]:\\
&=\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n}:\exp[-2(f^{\dagger}-\bar{\xi}P^{\mathrm{T}}-\xi N^{\mathrm{T}})(f^{\mathrm{T}}-L\bar{\xi}^{\mathrm{T}}-Q\xi^{\mathrm{T}})]:
\end{aligned}
\tag{13.60}
$$

再由 Weyl - Wigner 对应规则,可得

$$
\begin{aligned}
&WK(f,f^{\dagger})W^{-1}\\
&=\int\Big(\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}\bar{\xi}_i\mathrm{d}\xi_i\Big)k(\xi,\bar{\xi})W\Delta_f^n(\xi,\bar{\xi})W^{-1}\\
&=:\int\Big(\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}\bar{\xi}_i\mathrm{d}\xi_i\Big)k(\xi,\bar{\xi})\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n}\exp[-2(f^{\dagger}-\\
&\quad\bar{\xi}P^{\mathrm{T}}-\xi N^{\mathrm{T}})(f^{\mathrm{T}}-L\bar{\xi}^{\mathrm{T}}-Q\xi^{\mathrm{T}})]:
\end{aligned}
\tag{13.61}
$$

令

$$
\begin{pmatrix}\zeta^{\mathrm{T}}\\ \bar{\zeta}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q & L\\ N & P\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^{\mathrm{T}}\\ \bar{\xi}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}
\tag{13.62}
$$

并注意到

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} Q & L \\ N & P \end{pmatrix} &= \det Q \det(P - NQ^{-1}L) \\
&= \det Q \det[P + (Q^{-1})^{\mathrm{T}} N^{\mathrm{T}} L] \\
&= \det Q \det[P + (Q^{-1})^{\mathrm{T}} (I - Q^{\mathrm{T}} P)] \\
&= 1
\end{aligned} \tag{13.63}
$$

可以将式(13.61)化为

$$
\begin{aligned}
& WK(f, f^{\dagger})W^{-1} \\
&= \int \Big(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}\bar{\zeta}_i \mathrm{d}\zeta_i\Big) k\left[(\zeta, \bar{\zeta})\begin{pmatrix} P & N \\ L & Q \end{pmatrix}\right] \Delta_f^n(\zeta, \bar{\zeta}) \\
&= \int \Big(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}\bar{\zeta}_i \mathrm{d}\zeta_i\Big) k\left[(\zeta, \bar{\zeta})\begin{pmatrix} P & N \\ L & Q \end{pmatrix}\right] \vdots\, \delta(f^{\dagger} - \bar{\zeta})\delta(f - \zeta) \,\vdots \\
&= \vdots \int \Big(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}\bar{\zeta}_i \mathrm{d}\zeta_i\Big) k\left[(\zeta, \bar{\zeta})\begin{pmatrix} P & N \\ L & Q \end{pmatrix}\right] \delta(f^{\dagger} - \bar{\zeta})\delta(f - \zeta) \,\vdots \\
&= \vdots\, k\left[(f, f^{\dagger})\begin{pmatrix} P & N \\ L & Q \end{pmatrix}\right] \vdots \\
&= \vdots\, k(fP + f^{\dagger}L, fN + f^{\dagger}Q) \,\vdots
\end{aligned} \tag{13.64}
$$

这正好是式(13.50),于是(13.50)得证.

### 13.4.3 广义两模费米子压缩态

作为相似变换下费米子算符 Weyl 编序的不变性的一个应用,考虑如下的相似变换

$$
\begin{aligned}
& W_2 f_1 W_2^{-1} = \nu f_2^{\dagger} - \mu f_1, \quad W_2 f_1^{\dagger} W_2^{-1} = \sigma f_2 - \tau f_1^{\dagger} \\
& W_2 f_2 W_2^{-1} = -\mu f_2 - \nu f_1^{\dagger}, \quad W_2 f_2^{\dagger} W_2^{-1} = -\sigma f_1 - \tau f_2^{\dagger}
\end{aligned} \tag{13.65}
$$

其中 $\mu\tau + \sigma\nu = 1$ 保证了在此变换下反对易子的不变性.我们是想

得到态 $W_2|00\rangle$ 或 $\langle 00|W_2^{-1}$. 由真空投影算符的 Weyl 编序得

$$
\begin{aligned}
& W_2 \mid 00\rangle\langle 00 \mid W_2^{-1} \\
= & \frac{1}{4} W_2 \, \vdots \exp(-2f_1^{\dagger}f_1 - 2f_2^{\dagger}f_2) \vdots \, W_2^{-1} \\
= & \frac{1}{4} \vdots \exp\{-2[(\sigma f_2 - \tau f_1^{\dagger})(\nu f_2^{\dagger} - \mu f_1) + \\
& (\sigma f_1 + \tau f_2^{\dagger})(\mu f_2 + \nu f_1^{\dagger})]\} \vdots \\
= & \frac{1}{4} \vdots \exp\{-2[2(\sigma\mu f_1 f_2 + \tau\nu f_2^{\dagger} f_1^{\dagger}) + (\tau\mu - \nu\sigma) \times \\
& (f_1^{\dagger}f_1 + f_2^{\dagger}f_2)]\} \vdots
\end{aligned}
\tag{13.66}
$$

再由式(13.29)立即得到 $W_2|00\rangle\langle 00|W_2^{-1}$ 的膺经典对应

$$
\begin{aligned}
& W_2 \mid 00\rangle\langle 00 \mid W_2^{-1} \\
= & \frac{1}{4}\int \prod_{i=1}^{2} \mathrm{d}\bar{\xi}_i \mathrm{d}\xi_i \exp\{-2[2(\sigma\mu\xi_1\xi_2 + \tau\nu\bar{\xi}_2\bar{\xi}_1) + (\tau\mu - \nu\sigma) \\
& (\bar{\xi}_1\xi_1 + \bar{\xi}_2\xi_2)]\}\Delta_f(\xi_1, \bar{\xi}_1)\Delta_f(\xi_2, \bar{\xi}_2) \\
= & \frac{1}{16}\int \prod_{i=1}^{2} \mathrm{d}\bar{\xi}_i \mathrm{d}\xi_i :\exp\Big[-4\tau\mu(\bar{\xi}_1\xi_1 + \bar{\xi}_2\xi_2) + 2\sum_{i=1}^{2}(\bar{\xi}_i f_i + \\
& f_i^{\dagger}\xi_i) - 2\sum_{i=1}^{2} f_i^{\dagger}f_i - 4(\sigma\mu\xi_1\xi_2 + \tau\nu\bar{\xi}_2\bar{\xi}_1)\Big]: \\
= & \int \frac{\tau\mu \,\mathrm{d}\bar{\xi}_2 \mathrm{d}\xi_2}{4} :\exp\Big[-4\bar{\xi}_2\xi_2 + 2\bar{\xi}_2\Big(f_2 - \frac{\nu}{\mu}f_1^{\dagger}\Big) + \\
& 2\Big(f_2^{\dagger} - \frac{\sigma}{\tau}f_1\Big)\xi_2 - 2\sum_{i=1}^{2} f_i^{\dagger}f_i + \frac{1}{\tau\mu}f_1^{\dagger}f_1\Big]: \\
= & \tau\mu :\exp\Big[\Big(f_2^{\dagger} - \frac{\sigma}{\tau}f_1\Big)\Big(f_2 - \frac{\nu}{\mu}f_1^{\dagger}\Big) + \frac{1}{\tau\mu}f_1^{\dagger}f_1 - 2\sum_{i=1}^{2} f_i^{\dagger}f_i\Big]: \\
= & \tau\mu \exp\Big(-\frac{\nu}{\mu}f_2^{\dagger}f_1^{\dagger}\Big) :\exp\Big(-\sum_{i=1}^{2} f_i^{\dagger}f_i\Big): \exp\Big(\frac{\sigma}{\tau}f_2 f_1\Big) \\
= & \tau\mu \exp\Big(-\frac{\nu}{\mu}f_2^{\dagger}f_1^{\dagger}\Big) \mid 00\rangle\langle 00 \mid \exp\Big(\frac{\sigma}{\tau}f_2 f_1\Big)
\end{aligned}
\tag{13.67}
$$

分解式(13.67)就给出

$$W_2 \mid 00\rangle = \mu\exp\left(-\frac{\nu}{\mu}f_2^\dagger f_1^\dagger\right)\mid 00\rangle \tag{13.68}$$

$$\langle 00 \mid W_2^{-1} = \tau\langle 00 \mid \exp\left(\frac{\sigma}{\tau}f_2 f_1\right) \tag{13.69}$$

此即广义的费米子压缩态.

# 参考文献


[1] Berezin F A. The Method of Second Quantization [M]. New York, Academic Press, 1966.

[2] Fan Hongyi. Mapping of a classical transformation in Grassmann number space to a Fermi unitary operator [J]. Phys. Rev. A, 1989, 40:4237 - 4241; Fan Hongyi. Normally ordered Fermi operator realization of the SUn group [J]. J. Math. Phys., 1990, 31:257.

[3] Fan Hongyi, Fan Yue, Chan F T. Normally ordered unitary operator for multimode squeezed fermion states [J]. Phys. Lett. A, 1998, 247:267 - 272.

[4] Fan Hongyi. Application of Weyl - Wigner method in calculating thermal averages [J]. Commun. Theor. Phys., 1991, 16:123.

[5] Fan Hongyi, Sun Z H. New formulation for squeezed fermion-pair states as a counterpart of Grassmannian evolution [J]. Eur. Phys. J. D, 2000, 12:11.

[6] Fan Hongyi, Ruan Tunan. Quantum theory for fermion system and its pseudo-classical correspondence [J]. Commun. Theor. Phys., 1984, 3:45.

[7] Fan Hongyi. Invariance of Weyl ordering of Fermi operators under similar transformations [J]. Mod. Phys. Lett. A, 2006, 21:809.

# 结　语

本书介绍的量子相空间的理论是在有序算符内的积分技术和纠缠态表象的基础上阐述的.前者得益于发展了的 Dirac 符号法，后者则发挥了爱因斯坦等三人的量子纠缠思想，使得本书洋溢着连系量子统计与量子光学的创新思维.新思维往往是稍纵即逝的，范洪义有诗曰：

感悟悠悠复疏疏，游在脑海眼前无.
似与思者捉迷藏，一绪闪过醒梦处.

而有价值的新思维更是凤毛麟角.南宋著名诗人杨万里也曾写过一首诗描写他作诗时灵感来去无影的喜怒哀乐：

野践得幽咏，不吐聊自味.
健步忽传呼，云有远书至；
开缄秪暄凉，此外无一事.
奇怀坐消泯，追省宁复记？
方欢遽成闷，俗物真败意！
山鹊下虚庭，对语含喜气；
一笑起振衣，吾心本无滞.

在村野中漫步的他，触景生情，在脑海中已咏成一首诗(幽咏)，尚未有笔砚纸写出来(不吐)，在聊以自娱(自味)的当口，忽有传信者(健步)呼，说有远方的书信到，开信后一看，不过是寒暄，而方才的“幽咏”思绪却荡然无存，怎么也想不起来了，正是扫兴郁闷.然后看到喜鹊对语，才“破涕为笑”，振振自己的衣服，宽慰自己吧，不必为失去的诗而心滞.

就让我们以杨万里的“吾心本无滞”作为本书的结语吧！